ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора АлександраI»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Петрозаводский филиал ПГУПС

ОДОБРЕНО
на заседании цикловой комиссии
протокол № 8 от 28 апреля 2017 г.
Председатель цикловой комиссии:
Масавлева Т.А. (________)

УТВЕРЖДАЮ
Начальник УМО
__________ А.В. Калько
«28» 04 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению практических занятий

По учебной дисциплине: ЕН.02. Элементы математической логики

Специальность: 09.02.02 Компьютерные сети

Разработчик: Пуолакайнен Л.М.

2017 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации и проведению практических занятий разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.02. Элементы математической логики и предназначены для выполнения практических занятий обучающимися.

Практические занятия по учебной дисциплине направлены на усвоение знаний, освоение умений и формирование элементов общих и профессиональных компетенций, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен
уметь:

формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;

знать:

основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;

формулы алгебры высказываний;

методы минимизации алгебраических преобразований;

основы языка и алгебры предикатов;

В результате освоения учебной дисциплины происходит поэтапное формирование элементов общих и профессиональных компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности

ПК 1.1. Выполнять проектирование кабельной структуры компьютерной сети.

ПК 1.2. Осуществлять выбор технологии, инструментальных средств и средств вычислительной техники при организации процесса разработки и исследования объектов профессиональной деятельности.

ПК 1.4. Принимать участие в приемо-сдаточных испытаниях компьютерных сетей и сетевого оборудования различного уровня и в оценке качества и экономической эффективности сетевой топологии.

ПК 2.3. Обеспечивать сбор данных для анализа использования и функционирования программно-технических средств компьютерных сетей.

ПК 3.5. Организовывать инвентаризацию технических средств сетевой инфраструктуры, осуществлять контроль оборудования после его ремонта.

Рабочей программой предусмотрено выполнение обучающимися практических занятий, включая, как обязательный компонент практические задания с использованием персонального компьютера.

Распределение результатов освоения учебного материала в ходе выполнения заданий на практических занятиях происходит в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Распределение результатов освоения учебного материала

Раздел, тема	**Контрольно-оценочные мероприятия**	**Результаты**		**Поэтапно формируемые элементы общих и профессиональных компетенций**
		усвоенные знания	**освоенные умения**	
Раздел 1.Алгебра высказываний				
Тема 1.1 Логические операции	**Практическое занятие №1**	основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1. ОК 2. ПК 1.1.
Тема 1.2. Правила записи сложных формул	**Практическое занятие №2**	основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1. ОК 2.
Тема 1.3. Законы алгебры логики	**Практическое занятие №3**	основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1. ОК 2.
Тема1.5. Нормальные формы формул	**Практическое занятие №4**	формулы алгебры высказываний;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1 ОК 2..
Тема 1.6. Минимизация логических функций	**Практическое занятие №5**	методы минимизации алгебраических преобразований;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1. ОК 2. ПК 1.2.
Раздел 2. Исчисление высказываний				

Тема 2.3. Метод дедуктивного вывода	**Практическое занятие №6**	методы минимизации алгебраических преобразований;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1. ОК 2. ОК 8. ПК 1.4.
Тема 2.4. Алгоритм вывода по принципу резолюции.	**Практическое занятие №7**	методы минимизации алгебраических преобразований;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1. ОК 2. ОК 8. ПК 3.5.
Раздел 3.Алгебра предикатов				
Тема 3.1. Предикаты. Области определения и истинности	**Практическое занятие №8**	основы языка и алгебры предикатов;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1. ОК 2. ОК 9. ПК 2.3.
Тема 3.2. Формулы алгебры предикатов	**Практическое занятие №9**	основы языка и алгебры предикатов;	формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;	ОК 1. ОК 2. ОК 9.

Содержание практических занятий охватывает весь круг умений и компетенций, на формирование которых направлена учебная дисциплина.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1

Логические операции

Практическое занятие №2

«Построение и преобразование логических формул с использованием таблиц истинности».

Практическое занятие №3

Эквивалентные преобразований основных логических операций для упрощения логических формул

Практическое занятие №4.

Нахождение СДНФ и СКНФ формул путем равносильных преобразований, используя таблицы истинности

Практическое занятие №5:

Минимизация логических функция по методу Квайна и с использованием карт Карно.

Практическое занятие №6

Использование метода дедуктивного вывода для установления непротиворечивости логической формулы

Практическое занятие №7.

Использование метода резолюций вывода для установления непротиворечивости (выявления противоречия) логической формулы

Практическое занятие №8

«Предикаты, их области определения и множества истинности»

Практическое занятие №9

Построение формул алгебры предикатов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

При оценке освоенных умений при выполнении практических работ применяется пятибалльная шкала оценивания.

Оценивание практических занятий производится в соответствии со следующими нормативными актами:

- Положение о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;
- Положение о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий.

Практическое занятие №1

Тема Логические высказывания

Цели:

1. Закрепление теоретических знаний о об основных операциях алгебры логики.

2. Получение практических навыков работы с формулами алгебры логики.

3. Получение практических навыков построение таблиц истинности формул алгебры логики

Оборудование и принадлежности: калькулятор, индивидуальное задание, листы формата А 4.

Ход выполнения работы

Определение. Под высказыванием понимают любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическое значение высказывания «истина» («ложь») обозначается буквой И(Л) или цифрой 1(0). Высказывания обычно обозначают малыми латинскими буквами *(p, q, x, y, z, ...)*.

Формула **А**, принимающая истинное значение при любых комбинациях значений входящих в нее высказываний, называется тождественно истинной формулой (ТИФ) или тавтологией и записывается **А≡1**. Формула **В**, принимающая ложное значение при любых комбинациях значений входящих в нее высказываний, называется тождественно ложной формулой (ТЛФ) и записывается **В≡0**.

Пример. Среди следующих предложений выделите высказывания и установите, истинны они или ложны:

1) река Волга впадает в озеро Ильмень;
2) всякий человек имеет брата;
3) да здравствуют наши спортсмены!
4) существует человек, который моложе своего отца;
5) который час?
6) ни один человек не весит более 1000 кг;
7) $23<5$;
8) для всех действительных чисел x и y верно равенство $x + y = y + x$;
9) x^2-$7x$+12;
10) x^2-$7x$+12, $x_1=3$, $x_2=4$.

Решение. Легко видеть, что высказывания 4), 6), 8) – истинны, а высказывания 1), 2), 7) – ложны. Предложения 3), 5), 9), 10) не являются высказываниями.

Пример. Пусть p– высказывание «Студент N изучает французский язык», q – «Студент N успевает по математической логике (МЛ)». Необходимо привести словесную формулировку высказываний:

1) $p \wedge \overline{q}$; 2) $p \rightarrow q$; 3) $\overline{q} \leftrightarrow \overline{p}$.

Решение.

а) «студент N изучает французский язык и не успевает по МЛ»;

б) «если студент N изучает французский язык, то он успевает по математической логике»;

в) «студент N не успевает по МЛ тогда и только тогда, когда он не изучает французский язык».

Применение логических операций позволяет формализовать любые высказывания, представленные предложениями естественного языка. Частица «не» соответствует логической операции отрицания, союзы «и», «а» – логической операции конъюнкции, «или» («либо – либо») – логической операции дизъюнкции. Условному предложению вида «если – то» соответствует логическая операция импликации (условное предложение), слова – связки «тогда и только тогда» равносильны логической операции эквивалентности (безусловное предложение).

Пример. Составить таблицу истинности составного высказывания $a \wedge (b \to c) \leftrightarrow (b \vee c \wedge a) \vee \bar{b}$. Вначале необходимо определить приоритет (последовательность) выполнения логических операций. Для данного примера приоритет определится так, как это показано ниже.

$$a \overset{5}{\wedge} (b \overset{2}{\to} c) \overset{7}{\leftrightarrow} (b \overset{4}{\vee} c \overset{3}{\wedge} a) \overset{6}{\vee} \bar{b}^{1}.$$

Определяют количество переменных, входящих в высказывание, и выписывают всевозможные наборы значений этих переменных. Количество наборов переменных определяет число строк таблицы истинности и для бинарных переменных оно равно 2^n, где n– число различных переменных. Количество столбцов таблицы истинности определяется количеством последовательно выполняемых операций. Для данного примера таблица истинности имеет следующий вид:

a	b	C	$\bar{b}$	$b \to c$	$c\&a$	$b \vee c \& a$	$a \& (b \to c)$	$(b \vee c \& a) \vee \bar{b}$	$a \& (b \to c) \leftrightarrow (b \vee c \& a) \vee$
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

Основные формулы алгебры высказываний

Основные равносильности.	*Равносильности, выражающие*	
	одни операции через другие.	*основные законы алгебры логики*

1) $\& x \& \ldots \& x \equiv x)$ 2) $x \vee x \vee \ldots \vee x \equiv x)$ 3) $x \& 1 \equiv x;$ 4) $x \vee 1 \equiv 1;$ 5) $x \& 0 \equiv 0;$ 6) $x \vee 0 \equiv x;$ 7) $x \& \bar{x} \equiv 0$ 8) $x \vee \bar{x} \equiv 1$ 9) $\bar{\bar{x}} \equiv x$ 10) $x \& (y \vee x) \equiv x$ 11) $x \vee (y \& x) \equiv x$	1) $x \leftrightarrow y \equiv$ $= (x \to y) \& (y \to x$ 2) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y;$ 3) $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ 4) $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$ 5) $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}};$ 6) $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}.$	1) $x \& y \equiv y \& x$ 2) $x \vee y \equiv y \vee x$ 3) $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ 4) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ 5) $x \& (y \vee z) \equiv$ $\equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ 6)$x \vee (y \& z) \equiv$ $\cong (x \vee y) \& (x \vee z)$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 1	
1.1.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а) 2х2=4 б)Петрозаводск - столица США;* *в) Учиться на "хорошо" и "отлично"! г) Поезд "Карелия" - скорый.*
1.1.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(А,В),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Андрей студент и Борис не студент;* *б) Неверно, что Андрей и Борис - оба студенты.*
1.1.3	Пусть *С* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C \wedge D$; *б)* $\vec{C} \vee D$
1.1.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(A \Rightarrow A) \vee B$; *б)* $(((A \wedge B) \vee (\bar{C})) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$
1.1.5	Найти значения *А, В,* С, если: *а)* $\overline{A \wedge B} = Л$ *б)* $\begin{cases} ((\overline{A \wedge B}) \equiv C) = И \\ (C \vee \bar{A}) = Л \end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 2	
1.2.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а)2* - простое число; б)*Ни когда не говори "Ни когда";* *в) ЛЭП "Москва-Саратов" - линия электропередач.*
1.2.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(А,В),* символы

	$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Борис студент, а Андрей не студент;* *б)Неверно, что Борис студент и Андрей не студент*
1.2.3	Пусть *C* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C \wedge \overline{D}$ *;* *б)* $\overline{C \wedge D}$
1.2.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(C \Rightarrow (A \equiv A)$; *б)* $(((C \wedge D) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow (B \vee \vec{B})))$
1.2.5	Найти значения *A*, *B,* С, если: *а)* $(A \vee (A \wedge B)) = Л$ *б)* $\begin{cases} (((A \wedge B) \vee C) \equiv A) = И \\ A \vee \overline{B}) = Л \end{cases}$
Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 3	
1.3.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а) Город Париж находится в Азии;* *б)Я учусь на "хорошо" и "отлично";* *в) Учиться на "хорошо" и "отлично"*
1.3.2	Пусть *A и B* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(A,B),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Андрей и Борис - оба не студенты;* *б) Андрей студент тогда и только тогда, когда Борис студент* *в)* $\sqrt{a^2 + b^2}$
1.3.3	Пусть *C* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $\vec{C} \wedge D$ *;* *б)* $\overline{C \vee D}$
1.3.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(A \Rightarrow (\overline{A}))$; *б)* $((A \vee (B \vee (\overline{A}))) \wedge (C \vee (A \vee (\overline{C}))))$
1.3.5	Найти значения *A*, *B,* С, если: *а)* $((A \wedge B) \equiv (B \vee C)) = И$ *б)* $\begin{cases} (((A \wedge B) \vee C) \Rightarrow A) = И \\ (A \vee \overline{C}) = Л \end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 4

1.4.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а)3+5;* *б)Линия электропередач Москва-Саратов* *в) Я вежлив с окружающими*
1.4.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(А,В),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Андрей или Борис студент;* *б) Борис студент тогда и только тогда, когда Андрей студент.* *в)* $c^2 - b^2$
1.4.3	Пусть *С* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $\overline{C} \wedge \overline{D}$; *б)* $\overrightarrow{\overline{C} \wedge \overline{D}}$
1.4.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ *б)* $((B \equiv B) \wedge (C \Rightarrow C) \wedge (A \vee (\overline{A})))$
1.4.5	Найти значения *А, В,* С, если: *а)* $A \equiv B \wedge C \vee A \equiv Л$; *б)* $\begin{cases}(A \equiv C) = Л \\ (A \vee C) = Л\end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 5	
1.5.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а) 7 - простое число;* *б) Я учусь на "хорошо" и "отлично";* *в)* $\frac{3+5}{2} = 4$
1.5.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(А,В),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Либо Андрей студент, либо Борис студент;* *б) Неверно, что Андрей и Борис- оба студенты.*
1.5.3	Пусть *С* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C \vee \overline{D}$; *б)* $\vec{C} \vee D$
1.5.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(A \Rightarrow (A \equiv A))$; *б)* $(((A \wedge B) \vee (\overline{C})) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$
1.5.5	Найти значения *А, В,* С, если:*а)* $\overline{A \wedge B} = Л$; *б)* $\begin{cases}(A \Rightarrow B) = Л \\ ((A \wedge B) \equiv C) = И\end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 6	
1.6.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а)* $\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$; *б)В Карелии в изобилии водятся крокодилы;* *в) Линия электропередач Москва-Саратов.*
1.6.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(А,В),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Ни Андрей, ни Борис не студенты;* *б) Борис студент и Андрей не студент*
1.6.3	Пусть *С* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C \wedge D$; б) $\overline{C \wedge D}$
1.6.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(A \wedge \overline{B}) \vee B$; *б)* $(((C \wedge D) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow (B \vee \overline{B}))$
1.6.5	Найти значения *А, В,* С, если:*а)* $\overline{(A \Rightarrow (\overline{B}))} = И$; *б)* $\begin{cases} ((\overline{A \wedge B}) \equiv C) = И \\ (C \vee \overline{A}) = Л \end{cases}$
Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 7	
1.7.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а)* $\sqrt{9} = 2$*;* *б)ЛЭП "Москва-Саратов" - линия электропередач;* *в) Скорый поезд "Карелия".*
1.7.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(А,В),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Андрей не студент и Борис не студент;* *б) Андрей студент тогда и только тогда, когда Борис студент*
1.7.3	Пусть *С* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C \wedge \overline{D}$*; б)* $\overline{C \vee D}$
1.7.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(\overline{A} \vee B) \wedge A$; *б)* $((A \vee (B \vee (\overline{A}))) \wedge (C \vee (A \vee (\overline{C}))))$
1.7.5	Найти значения *А, В,* С, если: *а)* $\overline{(A \vee (A \equiv B))} \Rightarrow C = Л$;

	б) $\begin{cases}(((A\wedge B)\vee C)\Rightarrow A)=И\\(A\vee\overline{C})=Л\end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 8	
1.8.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а)Линия электропередач Москва-Саратов;* *б)В огороде бузина, в Киеве - дядька;* *в) Учиться на "хорошо" и "отлично"!*
1.8.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(А,В),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а)Борис студент тогда и только тогда, когда Андрей студент.* *б) Неверно, что Андрей студент и Борис не студент*
1.8.3	Пусть *С* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $\vec{C}\wedge D$; *б)* $\overline{\overline{C}\wedge\vec{D}}$
1.8.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(A\Rightarrow A)\vee B$; *б)* $(((A\wedge B)\vee(\overline{C}))\Rightarrow(A\Rightarrow A))$
1.8.5	Найти значения *А, В,* С, если:*а)* $\overline{(A\Rightarrow(\overline{B}))}=И$; *б)* $\begin{cases}(A\equiv C)=Л\\(A\vee C)=Л\end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 9	
1.9.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а) ЛЭП "Москва-Саратов" - линия электропередач;* *б) Я учусь на "хорошо" и "отлично"* *в)* $a^2+b^2-c^2$
1.9.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(А,В),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Андрей студент и Борис не студент;* *б) Неверно, что Андрей и Борис - оба студенты*
1.9.3	Пусть *С* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $\overline{C}\wedge\overline{D}$; *б)* $\vec{C}\vee D$
1.9.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(C\Rightarrow(A\equiv A)$ *б)* $(((C\wedge D)\vee(A\wedge B))\Rightarrow(B\vee\vec{B})))$

1.9.5	Найти значения *A, B,* C, если:*а)а)* $\overline{A \wedge B} = Л$; *б)* $\begin{cases} (((A \wedge B) \vee C) \equiv A) = И \\ A \vee \overline{B}) = Л \end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 10	
1.10.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а) Я вежлив с окружающими;* *б) Ни когда не говорю"Ни когда";* *в)* $a^2 + b^2; c^2$
1.10.2	Пусть *A и B* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(A,B),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Борис студент, а Андрей не студент б) Неверно, что Борис студент и Андрей не студент*
1.10.3	Пусть *C* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C \vee \overline{D}$; б) $\overline{C \wedge D}$
1.10.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(A \Rightarrow (\overline{A}))$; *б)* $((A \vee (B \vee (\overline{A}))) \wedge (C \vee (A \vee (\overline{C}))))$
1.10.5	Найти значения *A, B,* C, если:*а)* $(A \vee (A \wedge B)) = Л$; *б)* $\begin{cases} (A \Rightarrow B) = Л \\ ((A \wedge B) \cong C) = И \end{cases}$
Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 11	
1.11.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а)Линия электропередач Москва-Саратов;* *б)* $\frac{3+5}{2} = 4$ *в) Поезд "Карелия" - скорый*
1.11.2	Пусть *A и B* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(A,B),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Андрей и Борис оба не студенты;* *б) Андрей студент тогда и только тогда, когда Борис студент*
1.11.3	Пусть *C* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C \wedge D$; *б)* $\overline{C \vee D}$
1.11.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$; *б)* $((B \equiv B) \wedge (C \Rightarrow C) \wedge (A \vee (\overline{A})))$

1.11.5	Найти значения *A*, *B*, С, если:*а)* $(\overline{A \Rightarrow (\overline{B})}) = И$; *б)* $\begin{cases} ((\overline{A \wedge B}) \equiv C) = И \\ (C \vee \overline{A}) = Л \end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 12	
1.12.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а)* $(a^2 + b^2) / c^2$ б) *В Карелии в изобилии водятся крокодилы;* *в) В огороде бузина, в Киеве - дядька*
1.12.2	Пусть *A и B* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(A,B),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Андрей или Борис студент;* *б) Борис студент тогда и только тогда, когда Андрей студент.*
1.12.3	Пусть *C* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C \wedge \overline{D}$ *; б)* $\overrightarrow{\overline{C} \wedge \overline{D}}$
1.12.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(A \Rightarrow (A \equiv A))$; *б)* $(((A \wedge B) \vee (\overline{C})) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$
1.12.5	Найти значения *A*, *B,* С, если: *а)* $((A \wedge B) \equiv (B \vee C)) = И$; *б)* $\begin{cases} (((A \wedge B) \vee C) \Rightarrow A) = И \\ (A \vee \overline{C}) = Л \end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 13	
1.13.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а) ЛЭП "Москва-Саратов" - линия электропередач;* *б) Я учусь на "хорошо" и "отлично";* *в)* $\frac{3+5}{2}$
1.13.2	Пусть *A и B* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(A,B),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Либо Андрей студент, либо Борис студент* *б) Неверно, что Андрей и Борис -оба не студенты*
1.13.3	Пусть *C* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $\vec{C} \wedge D$ *б)* $C \wedge \overline{D} \vee \overline{C} \wedge D$
1.13.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразо-

	ванных форм. *а)* $(A\wedge\overline{B})\vee B$; *б)* $(((C\wedge D)\vee(A\wedge B))\Rightarrow(B\vee\overline{B})))$
1.13.5	Найти значения *A*, *B*, С, если:*а)* $\overline{A\wedge B}=Л$; *б)* $\begin{cases}(A\equiv C)=Л\\(A\vee C)=Л\end{cases}$

Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 14	
1.14.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а)Скорый поезд "Карелия";* *б)Учиться на "хорошо" и "отлично"* *в) Ни когда не говори"Ни когда"*
1.14.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(A,B),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Ни Андрей, ни Борис не студенты;* *б) Борис студент и Андрей не студент*
1.14.3	Пусть *C* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $\overline{C}\wedge\overline{D}$; *б)* $\vec{C}\vee D$
1.14.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм. *а)* $(\overline{A}\vee B)\wedge A$; *б)* $((A\vee(B\vee(\overline{A})))\wedge(C\vee(A\vee(\overline{C}))))$
1.14.5	Найти значения *A*, *B*, С, если:*а)* $\overline{(A\Rightarrow(\overline{B}))}=И$; *б)* $\begin{cases}(A\Rightarrow C)=Л\\(A\vee B)=И\end{cases}$
Мат.логика. раздел "Алгебра высказываний". Пр.работа 1. Вариант 15	
1.15.1	Является ли следующее предложение высказыванием? *а) В Карелии в изобилии водятся крокодилы;* *б) Линия электропередач Москва-Саратов;* *в)Поезд "Карелия" - скорый*
1.15.2	Пусть *А и В* обозначают соответственно «Андрей студент» и «Борис студент». Запишите приведенные ниже высказывания в символической форме, т. е. используя только обозначения для высказываний *(A,B),* символы $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$ искобки: *а) Андрей не студент и Борис не студент;* *б) Андрей студент тогда и только тогда, когда Борис студент.*
1.15.3	Пусть *C* обозначает «Снег белый», а*D*обозначает «Дважды два четыре». Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний: *а)* $C\vee\overline{D}$; $\overline{C\wedge D}$
1.15.4	Для данных пропозициональных форм составить таблицы истинности. Затем упростить эти формы и составить таблицы истинности для преобразованных форм.

	а) $(A \wedge \overline{B}) \vee C$; *б)* $(((A \wedge B) \wedge (A \wedge A)) \vee (\overline{A \wedge B}))$
1.15.5	Найти значения *A*, *B,* C, если:*а)* $A \equiv B \wedge C \vee A \equiv Л$; *б)* $\begin{cases} (A \Rightarrow B) = Л \\ ((A \wedge B) \cong C) = И \end{cases}$

Практическое занятие №2

Тема: «Построение и преобразование логических формул с использованием таблиц истинности».

Цели:

1. Закрепление теоретических знаний о преобразованиях логических формул с помощью таблиц истинности.
2. Получение практических навыков работы с таблицами истинности.

Оборудование и принадлежности: индивидуальное задание, листы формата А 4.

Основные операции алгебры логики и их таблицы истинности

1. Отрицание. Отрицанием высказывания *x* называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание *x* ложно, и ложным, если *x* истинно.

Отрицание высказывания *x* обозначается $\overline{x}$ (иногда применяется значок $\neg$) и читается «не *x*» или «неверно, что *x*». Логические значения высказывания $\overline{x}$ можно описать с помощью таблицы **истинности.**

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Пусть *x* высказывание. Так как $\overline{x}$ также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания $\overline{x}$, то есть высказывание $\overline{\overline{x}}$, которое называется ***двойным отрицанием*** высказывания *x*. Ясно, что логические значения высказываний $\overline{\overline{x}}$ и *x* совпадают.

Например, для высказывания «Река Волга впадает в каспийское море» отрицанием будет высказывание «Неверно, что река Волга впадает в каспийское море» или «Река Волга не впадает в каспийское море», а двойным отрицанием будет высказывание «Неверно, что река Волга не впадает в каспийское море».

2. Конъюнкция (логическое умножение).

Конъюнкцией двух высказываний *x, y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *x, y* истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно (т.е. в остальных случаях).

Конъюнкция высказываний *x, y* обозначается символом *x&y* или $x \cdot y$ $x \cap y$, читается «*x* и *y*». Высказывания *x, y* называются членами конъюнкции.

Все возможные значения конъюнкции двух высказываний *x* и *y* описываются таблицей истинности. Например, для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2 и 6 делится на 3», которое истинно.

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Из определения конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далекие друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний. («В огороде бузина и в Киеве дядька»).

Из определения операций конъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \cap \bar{x}$ всегда ложно.

Например, высказывание «В треугольнике *DFE* угол *D* или угол *E* острый истинно, так как обязательно истинно одно из высказываний: «В треугольнике *DFE* угол *D* острый», «В треугольнике *DFE* угол *E* острый». В повседневной речи союз «или» употребляется в различном смысле: исключающем и не исключающем. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Из определения операций дизъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \cup \bar{x}$ всегда истинно.

Импликация. **Операция, выражаемая связками «если ..., то», «из ... следует», ... влечет ...», называется импликацией** (лат. implico - тесно связаны) и обозначается знаком $\rightarrow$. **Высказывание А$\rightarrow$В ложно тогда и только тогда, когда А истинно, а В ложно.**

Каким образом импликация связывает два элементарных высказывания, покажем на примере высказываний: «данный четырехугольник - квадрат» (А) и «около данного четырехугольника можно описать окружность» (В). Рассмотрим составное высказывание А$\rightarrow$В, понимаемое как «если данный четырехугольник - квадрат, то около него можно описать окружность».

Есть три варианта, когда высказывание А$\rightarrow$В истинно:

1) А истинно и В истинно, т. е. данный четырехугольник –квадрат, и около него можно описать окружность.
2) А ложно и В ложно, т. е. данный четырехугольник –не квадрат, и около него нельзя описать окружность.
3) А ложно и В истинно, т. е. данный четырехугольник – не квадрат, но около него можно описать окружность.

Высказывание *x* называют **условием** или **посылкой**, высказывание *y* – **следствием** или **заключением**, высказывание $x \rightarrow y$ - **следованием** или **импликацией.**

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности.

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленция двух высказываний - новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x, у либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция двух высказываний *x* и *y* читается так: “для того, чтобы *x*, необходимо и достаточно, чтобы *y*”, или “*x* тогда и только тогда, когда *y*”.

Высказывания *x, y* называются **членами эквиваленции**. Логические значения операции эквиваленции описываются следующей таблицей истинности.

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Импликацию можно выразить через **дизъюнкцию и отрицание:** $A \to B = \overline{A} \bigcup B$

Докажем справедливость этого выражения с помощью таблицы истинности.

A	B	$A \to B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \bigcup B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Эквиваленцию можно выразить через **отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:** $A \leftrightarrow B = (\overline{A} \bigcup B) \cdot (\overline{B} \bigcup A)$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \bigcup B$	$\overline{B}$	$A \bigcup \overline{B}$	$(\overline{A} \bigcup B) \cdot (\overline{B} \bigcup A)$
1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1

Таким образом, **операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции достаточно, чтобы описывать и обрабатывать логические высказывания.**

Индивидуальные задания:

Задание 1.

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

Вариант 1

X	Y	Z	F
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Какое выражение соответствует F?

1) $\overline{X}\&Y\&\overline{Z}$
2) $X \vee \overline{Y} \vee Z$
3) $X\&\overline{Y}\&Z$
4) $\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}$

Вариант 2

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	1

Какое выражение соответствует F?

1) $X \vee Y \vee Z$
2) $X\&Y\&\overline{Z}$
3) $\overline{X}\&Y\&\overline{Z}$
4) $X \vee \overline{Y} \vee Z$

Вариант 3

X	Y	Z	F
0	1	1	0
1	0	0	1
0	0	1	1

Какое выражение соответствует F?

1) $(X \vee \overline{Y})\ \&Z$
2) $(X\&\overline{Y}) \vee Z$
3) $(X \vee \overline{Y}) \vee \overline{Z}$
4) $X\&\overline{Y}\&\overline{Z}$

Вариант 4

X	Y	Z	F
0	0	0	1
1	1	0	0
0	1	1	1

Какое выражение соответствует F?

1) $X\&Y \vee Z$
2) $\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}$
3) $(X \vee Y)\&\overline{Z}$
4) $(X \vee Y) \rightarrow Z$

Вариант 5

X	Y	Z	F
1	1	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1

Какое выражение соответствует F?

1) $X\&Y \vee Z$
2) $(X \vee Y) \rightarrow \overline{Z}$
3) $(\overline{X} \vee Y)\ \&Z$

Задание 2. Упростить формулы алгебры логики с помощью таблиц истинности

Вариант 1 $F = \overline{((X \vee Y)\ \&\ (Z \leftrightarrow X))}\&\ (Z \vee Y)$

Вариант 2 $F = (X\&Y)\ \&\overline{(\overline{X} \vee X)}\&(Z \leftrightarrow Y)$

Вариант 3 $F = (X \leftrightarrow Z)\ \&\ (\overline{X} \vee X)\ \&\ (Z \vee Y)$

Вариант 4 $F = \overline{((X \vee Z)\ \&\ (Z \leftrightarrow X))}\&\ (Z \rightarrow Y)$

Вариант 5 $F = \overline{(X \vee Y)} \vee\ (Z \rightarrow X)\ \&\ (Z \leftrightarrow Y)$

Практическое занятие №3

Тема: Эквивалентные преобразований основных логических операций для упрощения логических формул

Цели:

3. Закрепление теоретических знаний об эквивалентные преобразованиях логических операций для упрощения логических формул.
4. Получение практических навыков работы с формулами алгебры логики.

Оборудование и принадлежности: индивидуальное задание, листы формата А 4.

Ход выполнения работы

Основн7ые равносильности алгебры логики представлены в таблице

Основные равносильности.	*Равносильности, выражающие*	
	одни операции через другие.	*основные законы алгебры логики*
1) $x \& x \& \ldots \& x \equiv x$) 2) $x \vee x \vee \ldots \vee x \equiv x$) } 3) $x \& 1 \equiv x$; 4) $x \vee 1 \equiv 1$; 5) $x \& 0 \equiv 0$; 6) $x \vee 0 \equiv x$; 7) $x \& \bar{x} \equiv 0$ 8) $x \vee \bar{x} \equiv 1$; 9) $\bar{\bar{x}} \equiv x$ 10) $x \& (y \vee x) \equiv x$ 11) $x \vee (y \& x) \equiv x$	1) $x \leftrightarrow y \equiv$ $\equiv (x \to y) \& (y \to x)$; 2) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$; 3) $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ 4) $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$ 5) $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$; 6) $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}$.	1) $x \& y \equiv y \& x$ 2) $x \vee y \equiv y \vee x$ 3) $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ 4) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ 5) $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ 6) $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$

Используя равносильности I, II, III и их свойства, можно часть формул алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Равносильные преобразования формул применяются для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Рассмотрим некоторые наиболее распространенные соглашения о записи формул.

1. Не заключать в скобки формулу или часть ее, стоящую под знаком отрицания, то есть писать $\overline{p \vee q} \& r$ вместо $\overline{(p \vee q)} \& r$. **Операция инверсии является наиболее приоритетной среди основных операций.**

2. Считать, что знак конъюнкции связывает аргументы формулы «сильнее» знаков дизъюнкции, импликации и эквиваленции, то есть писать

$p \& q \vee r$ вместо $(p \& q) \vee r$; $p \to q \& r$ вместо $p \to (q \& r)$;

$p \& q \leftrightarrow r \& s$ вместо $(p \& q) \leftrightarrow (r \& s)$.

3. Считать, что знак дизъюнкции связывает сильнее знаков импликации и эквиваленции, то есть писать

$p \vee q \to r$ вместо $(p \vee q) \to r$; $p \leftrightarrow q \vee r$ вместо $p \leftrightarrow (q \vee r)$.

4. Считать, что знак импликации связывает сильнее, чем знак эквиваленции, то есть писать $p \to q \leftrightarrow r$ вместо $(p \to q) \leftrightarrow r$.

5. Опускать внешние скобки, то есть скобки, которые заключают внутри себя все остальные символы, составляющие формулу. Так, формулу $(p\,\&\,(q \to r))$ писать $p\,\&\,(q \to r)$.

Соглашения 1-5, а также опускание знака конъюнкции, значительно упрощают запись формул.

Например, формула $(((p\,\&\,q) \vee r) \to ((\bar{p} \vee q) \to \bar{r}))$, записанная с учетом этих соглашений, будет выглядеть так: $pq \vee r \to (\bar{p} \vee q \to \bar{r})$.

При чтении формула может быть названа по «последней» операции, знак которой слабее всех остальных знаков операций, входящих в формулу. Так, записанная выше формула представляет собой импликацию.

Пример. Доказать равносильность $\overline{p \to q} \equiv p\,\&\,\bar{q}$.

Решение. Для доказательства равносильности подвергнем левую часть формулы равносильным преобразованиям: $\overline{p \to q} \equiv \overline{\bar{p} \vee q} \equiv \bar{\bar{p}}\,\&\,\bar{q} \equiv p\,\&\,\bar{q}$. По шагам использовались следующие равносильности: II.2, II.4, I.9. Таким же образом вы должны оформлять индивидуальные задания, указывая номер формулы над знаком тождественности.

Пример. Необходимо упростить формулу: $(x \to x) \to x$; О*твет:X*

Индивидуальное задание.

С помощью равносильных преобразований упростить формулу
и доказать равносильность через таблицу истинности

1. $(x \to x) \to y$.	9. $(\overline{x \vee \bar{y}})(y \vee \bar{y})(y \vee z)$.
2. $\overline{\bar{x}\,\bar{y}} \vee (x \to y)\,\&\,x$.	10. $x(x \vee y)(x \vee z)$.
3. $(x \leftrightarrow y)\,\&\,(x \vee y)$.	11. $x_1x_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1 \vee x_1x_4$.
4. $(x \to y)\,\&\,(y \to z) \to (z \to x)$.	12. $(\overline{\bar{x}\,\&\,\bar{y}} \vee \bar{x})\,\&\,\overline{x \vee \overline{\bar{x}y}}$.
5. $x \vee (\bar{x}\,\&\,y)$	13. $(\overline{xy} \vee \bar{x}yz) \to (\bar{x} \vee \overline{xy \vee \bar{y}})$.
6. $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$	14. $(yz \vee \bar{x})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.
7. $x \to (y \to z)$	15. $\overline{\bar{x} \vee y} \vee (\bar{z} \to x)\,\&\,\bar{y}x$.
8. $(x \vee y)\,\&\,(z \vee t)$	16. $\overline{\bar{x} \vee y} \to (\bar{z} \to \bar{x})$

17. $\overline{(x \,\&\, \bar{y}) \vee (y \,\&\, z)}$.	24. $\overline{\bar{p}\,\bar{q}} \vee (p \to q)p$.
18. $(\overline{\bar{x} \,\&\, \bar{y}} \to \bar{x}) \,\&\, \overline{x \vee \overline{xy}}$.	25. $pq \vee \bar{p}q \vee \overline{pq}$.
19. $xyz \vee x\overline{yz} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}$.	26. $p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$.
20. $p\bar{q} \vee p\bar{r} \vee qr \vee q \vee r$	27. $(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(bc \vee \bar{a})$.
21. $pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}$.	28. $(\overline{\overline{ab} \vee c}) \to (ab \vee \bar{a}bc)$.
22. $(p \to q)(q \to \bar{p})$.	29. $(x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z) \,\&\, x \vee (y \,\&\, x)$.
23. $(p \to \bar{q}) \vee \overline{p \vee q}$	30. $x \,\&\, (y \vee x) \,\&\, (x \to y) \,\&\, (x \to y) \vee \overline{x \vee \bar{y}}$

Практическое занятие №4

Тема: Нахождение СДНФ и СКНФ формул путем равносильных преобразований, используя таблицы истинности

Цели:

1. Закрепление знаний о нормальных и совершенных нормальных формах
2. Получение навыков перевода формул в СДНФ и СКНФ

Элементарные дизъюнкции и конъюнкции.

Пусть задана система высказывательных переменных

$$(x_1, x_2, \dots, x_n). \qquad (1)$$

Элементарной дизъюнкцией (*конъюнкцией)* системы (1) называется дизъюнкция (конъюнкция) высказывательных переменных этой системы или их отрицаний.

Если в элементарную дизъюнкцию (конъюнкцию) входит каждое высказывательное переменное из системы (1) (с отрицанием или без него) и притом только один раз, то она называется *полной элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией)*.

Нормальные формы.

Формула F называется **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ) от высказывательных переменных системы (1), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций, образованных из переменных этой системы.

Формула F называется **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ) от высказывательных переменных системы (1), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций, образованных из этих переменных.

Например, следующие формы не являются нормальными дизъюнктивными формами $\overline{A \cup B}$; $A \cup (B \cap (C \cup D))$

Примеры формул в **ДНФ** $(A \cup B)$; $(A \cap B) \cup \overline{A}$; $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{D} \cap E \cap F) \cup (C \cap D) \cup B$

Следующие формы не являются нормальными конъюнктивными формами:

$\overline{B \cup C}$; $(A \cap B) \cup C$; $A \cap (B \cup (D \cap E))$

Но эти 3 формулы не в **КНФ** эквивалентны следующим формулам в **КНФ**:

$\overline{B} \cap \overline{C}$; $(A \cup C) \cap (B \cup C)$; $A \cap (B \cup D) \cap (D \cup E))$

Алгоритм построения ДНФ

1) Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы: $A \to B \overset{2.2}{=} \overline{A} \vee B$; $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$

2) Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным на основании формул:

$\overline{A \vee B} \overset{2.4}{=} \bar{A} \wedge \bar{B}$; $\overline{A \wedge B} \overset{2.3}{=} \bar{A} \vee \bar{B}$

3) Избавиться от знаков двойного отрицания.

4) Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения

Пример построения ДНФ. Приведем к ДНФ формулу: $F = ((X \to Y) \downarrow (\overline{Y \to Z}))$

Выразим логические операции $\to$ и $\downarrow$ через: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание: $F \overset{2.2}{\equiv} (\bar{X} \vee Y) \downarrow \overline{(\bar{Y} \vee Z)} \overset{5.1}{\equiv} \overline{(\bar{X} \vee Y)} \wedge \overline{\overline{(\bar{Y} \vee Z)}}$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания: $F = \overline{(\bar{X} \vee Y)} \vee \overline{\overline{(\bar{Y} \vee Z)}} \overset{2.4}{\equiv} (\bar{\bar{X}} \wedge \bar{Y}) \wedge (\bar{Y} \vee Z) \overset{1.9}{\equiv} (X \wedge \bar{Y}) \wedge (\bar{Y} \vee Z)$. Используя закон дистрибутивности, приводим формулу к ДНФ: $F \overset{3.5}{\equiv} (X \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge \bar{Y} \wedge Z)$.

Алгоритм построения КНФ

1) Заменить всех логические операций в формуле основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$A \to B = \overline{A \vee B}$; $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$

2) Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным на основании формул:

$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$; $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$

3) Избавиться от знаков двойного отрицания.

4) Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Пример построения КНФ

Приведем к КНФ формулу $F = (X \to Y) \wedge ((\bar{Y} \to Z) \to \bar{X})$

Преобразуем формулу F к формуле, не содержащей $\to$

$$F \overset{2.2}{\equiv} (\bar{X} \vee Y) \wedge \left(\overline{\bar{\bar{Y}} \to Z}\right) \vee \bar{X} \overset{2.2}{\equiv} (\bar{X} \vee Y) \wedge \bar{\bar{Y}} \vee Z \vee \bar{X})$$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания: $F \overset{2.4}{\equiv} (\bar{X} \vee Y) \wedge ((\bar{Y} \wedge \bar{Z}) \vee \bar{X})$

По закону дистрибутивности получим КНФ: $F \overset{3.5}{\equiv} (\bar{X} \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee \bar{Y}) \wedge (\bar{X} \vee \bar{Z})$

Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Формула F называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** (СКНФ) от высказывательных переменных системы (1) $x_1,\dots,x_n$, если она является конъюнкцией различных полных элементарных дизъюнкций от этих переменных (при этом равенство дизъюнкций понимается с точностью до порядка членов).

Формула F называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой** (СДНФ) от высказывательных переменных системы (1) $x_1,\ldots,x_n$, если она является дизъюнкцией различных полных элементарных конъюнкций от этих переменных.

Правила приведения к совершенной нормальной форме.

А. Правила приведения к СДНФ.

Из определения СДНФ следует, что формула F является СДНФ, если она отвечает условиям (обладает следующими “**свойствами совершенства** ”):

а) в ней нет двух одинаковых слагаемых (дизъюнктивных членов);

б) ни одно слагаемое не содержит двух одинаковых множителей;

в) никакое слагаемое не содержит переменную вместе с её отрицанием;

г) в каждом слагаемом содержится в качестве множителялибо каждая из переменных x_i, либо её отрицание $\overline{x}_i\,.\,i=\overline{1,n}$.

Пусть дана произвольная формула $\mathrm{F}(x_1,\ldots,x_n)$.

Выполним пять операций, которые приведут формулу к СДНФ.

1) Приведем её с помощью равносильных преобразований к ДНФ.

2) Если какое-нибудь из слагаемых этой ДНФ, например, B не содержит переменную x_i, то заменим его суммой $x_i B \vee \overline{x}_i B$.

Эта замена представляет собой равносильное преобразование, так как $x_i B \vee \overline{x}_i B \overset{3.5}{\equiv} (x_i \vee \overline{x}_i) \wedge B \overset{1.8}{\equiv} И \wedge B \overset{1.3}{\equiv} B$. Проделав операции по п.2), мы удовлетворили требованиям п. г) свойств совершенства.

3) Если в полученном выражении окажутся одинаковые слагаемые, то, удалив все, кроме одного из них (в силу закона идемпотентности (8)), мы получим опять равносильное выражение. Здесь мы удовлетворили п. а) свойств совершенства.

4) Если в некоторых слагаемых окажется по несколько одинаковых множителей, то лишние (в силу закона идемпотентности (9)) удаляем. Таким образом, мы удовлетворяем п. б) свойств совершенства.

Удаляем все те слагаемые, которые содержат какую-нибудь переменную x_i вместе со своим отрицанием $\overline{x}_i$, так как, в силу закона противоречия (15), они являются тождественно ложными выражениями – удовлетворили п. в) свойств совершенства

Если бы все слагаемые оказались таковыми, то и вся ДНФ была бы тождественно ложной. А тогда это значило бы, что исходная формула F – тождественно ложная формула и не имеет СДНФ. Именно поэтому мы утверждаем:

если формула F не является тождественно ложной, то в её произвольной ДНФ должны присутствовать слагаемые, удовлетворяющие условию п. в) свойств совершенства.

После удаления всех слагаемых, содержащих какую-нибудь переменную вместе с её отрицанием, мы получили ДНФ, удовлетворяющую всем свойствам совершенства, т.е. СДНФ.

Пример перехода от ДНФ к СДНФ

Если в какой-то простой конъюнкции недостает переменной, например, Z, вставляем в нее выражение: $Z \vee \overline{Z} = 1$, после чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктные слагаемые не пишем).

Например

$$X \vee \overline{Y} \wedge \overline{Z} \overset{1.8}{\equiv} X \wedge (Y \vee \overline{Y}) \wedge (Z \vee \overline{Z}) \vee (X \vee \overline{X}) \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \overset{3.5}{\equiv} X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge$$

Б. Правила приведения к СКНФ.

Из определения СКНФ - следует, что СКНФ обладает следующими свойствами совершенства (иными словами, СКНФ формулы $F(x_1,\dots,x_n)$ называется её КНФ, удовлетворяющая следующим условиям):

а) в ней нет двух одинаковых множителей;

б) ни один множитель не содержит двух одинаковых слагаемых;

в) ни один множитель не содержит какую-нибудь переменную x_i вместе с её отрицанием $\overline{x}_i$;

г) каждый множитель содержит в качестве слагаемых все переменные x_i или их отрицание $\overline{x}_i$, т.е. $i = \overline{1, n}$ для каждого множителя.

Пример перехода от КНФ к СКНФ

Если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например), z, то добавляем в нее выражение: $z \wedge \overline{z} \overset{1.7}{\equiv} 0$ (это не меняет самой дизъюнкции), после чего раскрываем скобки с использованием распределительного закона):

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \overset{1.6}{\equiv} ((X \vee Y \vee (Z \wedge \overline{Z})) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \overset{3.6}{\equiv}$$

$$\overset{3.6}{\equiv} (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$$

Таким образом, из КНФ получена СКНФ.

Задания к практическому занятию «Нормальные формы формул»

упростить формулу и доказать равносильность через таблицу истинности

1	$(x \to x) \to y$	2	$\overline{\bar{x}\,\bar{y}} \vee (x \to y)\,\&\,x$
3	$(x \leftrightarrow y)\,\&\,(x \vee y)$	4	$(x \to y)\,\&\,(y \to z) \to (z \to x)$
5	$x \vee (\bar{x}\,\&\,y)$	6	$xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$
7	$x \to (y \to z)$	8	$(x \vee y)\,\&\,(z \vee t)$
9	$(\overline{x \vee \bar{y}})(y \vee \bar{y})(y \vee z)$	10	$x(x \vee y)(x \vee z)$
11	$x_1x_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1 \vee x_1x_4$	12	$(\overline{\bar{x}\,\&\,\bar{y}} \vee \bar{x})\,\&\,\overline{x \vee \overline{\bar{x}y}}$
13	$(\overline{xy} \vee \bar{x}yz) \to (\bar{x} \vee \overline{xy \vee \bar{y}})$	14	$(yz \vee \bar{x})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$
15	$\overline{\bar{x} \vee y} \vee (\bar{z} \to x)\,\&\,\bar{y}x$		

II. Привести следующие формулы к ДНФ, затем к СДНФ

1	$(x \vee y)(x \vee \bar{y})$	2	$\overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee x\bar{y}$
3	$(x \leftrightarrow y)\,\&\,\overline{xz}$	4	$x(\bar{y} \vee z)$
5	$(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$	6	$(x \to z)xy$
7	$(x \to y)(y \to z)\,\&\,(x \vee \bar{y}) \to z$	8	$(x \leftrightarrow y)\,\&\,\bar{x}$
9	$(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)$	10	$(x \to y) \to (y \to x)$
11	$\overline{x \vee \bar{y}}\,\&\,(z \to \bar{x})$	12	$(\overline{\bar{x}\,\&\,\bar{y}} \vee x)\,\&\,\overline{x \to \overline{\bar{x}y}}$
13	$x\,\&\,(x \to y)$	14	$(\overline{xy} \to \bar{x})(\overline{xy \to \bar{y}})$
15	$(x \to y) \to (y \to x)$		

III. Привести следующие формулы к КНФ, затем к СКНФ

1	$x \vee x\bar{y}$	2	$xy \vee \bar{x}y$
3	$xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$	4	$xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$
5	$xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$	6	$(x \leftrightarrow y) \,\&\, \overline{xz}$
7	$(x \to y)(y \to z) \,\&\, (x \vee \bar{y}) \to z$	8	$xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$
9	$(\overline{\bar{x}z \leftrightarrow \overline{\overline{x \vee \bar{y}}}}) \to \overline{x \vee \bar{x}yz}$	10	$(\overline{xy} \vee \bar{x}yz) \,\&\, (\bar{x} \vee \overline{xy \vee \bar{y}})$
11	$\overline{x \vee \bar{y}} \,\&\, (z \to \bar{x})$	12	$(\overline{\bar{x} \,\&\, \bar{y}} \vee x) \,\&\, \overline{x \to \overline{\bar{x}y}}$
13	$(x \vee \bar{z}) \to yz$	14	$(x \vee \bar{y} \to xz) \to (\overline{x \to \bar{x}}) \vee y\bar{z}$
15	$(ab \to bc) \to (a \to b)$		

Практическое занятие №5

Тема: Минимизация логических функция по методу Квайна и с использованием карт Карно.

Цель работы: минимизация логические функций методом Квайна и картами Карно.

Метод Квайна - способ представления функции в ДНФ или КНФ с минимальным количеством членов и минимальным набором переменных.

Пусть функция *f*представлена в СДНФ. На первом этапа преобразование выполняется два действия:*Операция склеивания*; О*перация поглощения*

Операция склеивания сводится к нахождению пар членов, соответствующих виду $w \cdot x$ или $\overline{w} \cdot x$, и преобразованию их в следующие выражения: $w \cdot x \vee w \cdot \bar{x} = w(x \vee \bar{x}) = w$. Потом выполняется *операция поглощения*. Она основана на равенстве $w \vee w \cdot z = w(1 \vee z) = w$ (член w поглощает выражение $w \cdot z$). Обе операции могут выполняться до тех пор, пока это может быть осуществимо.

Применение этих операций показано в таблице:

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	0	1	0	1	1	1	1

СДНФ:

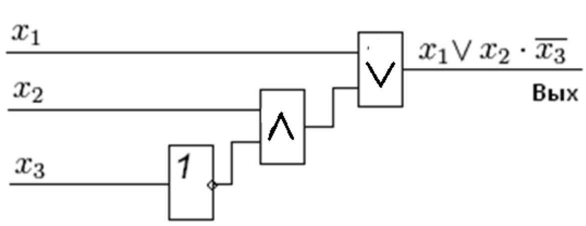
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Член $x_2 \cdot \overline{x_3}$ поглощает те члены исходного выражения, которые содержат $x_2 \cdot \overline{x_3}$, то есть первый и четвёртый. Член $x_1 \cdot \overline{x_2}$ поглощает второй и третий, а член $x_1 \cdot x_3$ - пятый член исходного выражения. В результате поглощения и склеивания получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1$$

В итоге, мы получили наиболее простое выражение, если сравнивать его с начальной версией - СДНФ.

Структурная схема элемента, реализующая полученную МДНФ, показана на рисунке.



Карты Карно. Этот методхорошо работает при числе аргументов 3-5 и обеспечивает простоту получения результата. Этот метод основан на зрительном анализе таблиц (карт) и не может быть применен для обработки вычислительной техникой.

Карта Карно строится в соответствии с таблицей истинности логической функции. Столбцы и строки карты Карно обозначаются прямыми и инверсными переменными данной функции.

Карта Карно для 2-х и для 3-х переменных

	$x2$	$\overline{x2}$
$x1$		
$\overline{x1}$		

	$x2$	$x2$	$\overline{x2}$	$\overline{x2}$
$x1$				
$\overline{x1}$				
	$\overline{x3}$	$x3$	$x3$	$\overline{x3}$

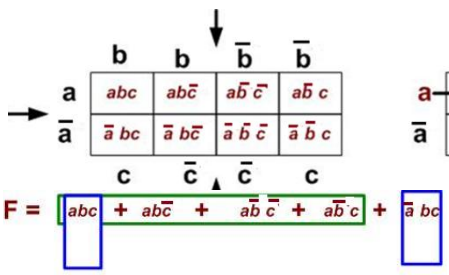
a	b	c	f
0	0	0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
1	0	0	$a\bar{b}\bar{c}$
0	1	0	$\bar{a}b\bar{c}$
0	0	1	$\bar{a}\bar{b}c$
1	1	0	$ab\bar{c}$
1	0	1	$a\bar{b}c$
0	1	1	$\bar{a}bc$
1	1	1	abc

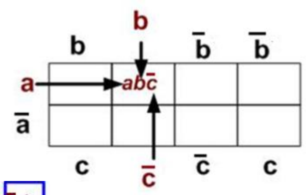
Число клеток карты равно числу всех возможных комбинаций входных переменных, т.е. 2^n, где n- число входных переменных.

Каждая клетка карты соответствует логическому произведению (прямого или инверсного значения) переменных, на пересечении которых она находится, что соответствует минтерме (в данном случае – элементарной конъюнкции) СНДФ. В карту Карно заносятся соответствующие значения минтерм.

Клетки, находящиеся на границах одной строки или столбца, так же считаются соседними

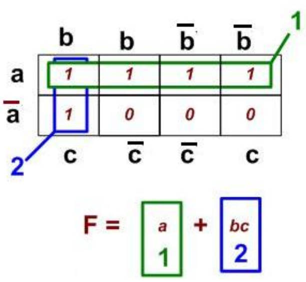
Пример: $F = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}bc$





Каждая клетка карты соответствует произведению переменных, на пересечении которых она находится. Если переменная (аргумент)изменяет свое значение, а функция при этом остается неизменной, то эту переменную можно исключить из выражения.

	b	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$
a	abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$
$\bar{a}$	$\bar{a}bc$			
	c	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c



Для получения минимальной функции НДФ (или МНДФ) охватывают областями все клетки, имеющие значение 1 и являющиеся соседними.

При аналитическом решении задачи получим

$$F = ab(c+\bar{c}) + a(\bar{b}\bar{c} + \bar{b}c) + bc(\bar{a} + a) =$$
$$= ab + a\bar{b} + bc = a + bc$$

Эти области должны быть прямоугольной формы и содержать чётное количество клеток. Для каждой области записывается неизменяющаяся часть объединенных минтерм.

Минимизируемые области могут иметь общие минтермы (пересекаться). В заключение все минтермы суммируются.

Эти переменные на протяжении всего квадрата изменяли свое значение. При этом количество минтерм также сократилось.

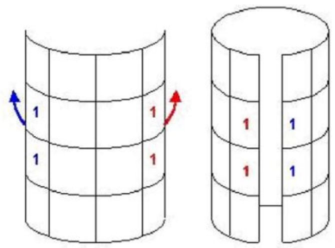


Рис. Метод скручивания карты Карно

Соседними также являются произведения, образующие синий квадрат 2. Количество итоговых минтерм, подлежащих сложению равно количеству квадратов.

Крайние квадраты карты являются соседними при ее скручивании. Это значит, что они тоже подлежат минимизации.

Практическое занятие "Минимизация логических функций". Задание 1:

1) По заданной таблице истинности построить карту Карно;

2) Построить МДНФ, проверить правильность построения методом Квайна;

3) Построить переключательную схему МДНФ.

Вар.1				**Вар.2**				**Вар.3**				**Вар.4**				**Вар.5**			
a	*b*	*c*	*f*	*a*	*b*	*c*	*f*	*a*	*b*	*c*	*f*	*a*	*b*	*c*	*f*	*a*	*b*	*c*	*f*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Вар.6				**Вар.7**				**Вар.8**				**Вар.9**				**Вар.10**			
a	*b*	*c*	*f*	*a*	*b*	*c*	*f*	*a*	*b*	*c*	*f*	*a*	*b*	*c*	*f*	*a*	*b*	*c*	*f*
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0

1	1	1	1

1	1	1	1

1	1	1	0

1	1	1	0

1	1	1	1

Вар.11

a	*b*	*c*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Вар.12

a	*b*	*c*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Вар.13

a	*b*	*c*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Вар.14

a	*b*	*c*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0

Вар.15

a	*b*	*c*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Практическое занятие "Минимизация логических функций". Задание 2:

2) По заданной карте Карно построить СДНФ;

2) Минимизировать СДНФ по методу Квайна и картам Карно;

3) Построить таблицу истинности, иллюстрирующую правильность решений

Вар. 1

	c				
a	1	1	1	1	
	1	1	1	1	b
		d			

Вар. 2

	c				
a	1	1	1	1	
					b
		d			

Вар. 3

	c				
a					
					b
			1	1	
			1	1	
		d			

Вар. 4

	c				
a	1	1			
	1	1			b
		d			

Вар. 5

	c				
a			1	1	
			1	1	b
		d			

Вар.6

	c				
a					
	1	1	1	1	b
	1	1	1	1	
		d			

Вар. 7

	c				
a					
					b
	1	1	1	1	
		d			

Вар. 8

	c				
a					
					b
	1	1	1	1	
		d			

Вар. 9

	c				
a	1	1			
	1	1			b
	1	1			
	1	1			
		d			

Вар. 10

	c				
a			1	1	
			1	1	b
			1	1	
			1	1	
		d			

Вар. 11

	c				
a	1	1			
	1	1			b
			1	1	
			1	1	
		d			

Вар. 12

	c				
a			1	1	
			1	1	b
	1	1			
	1	1			
		d			

Вар. 13

	c				
a	1	1	1	1	
					b
	1	1	1	1	
		d			

Вар. 14

	c				
a	1			1	
	1			1	b
	1			1	
	1			1	
		d			

Вар. 15

	c				
a		1	1		
		1	1		b
		1	1		
		1	1		
		d			

Практическое занятие №6

Тема: Использование метода дедуктивного вывода для установления непротиворечивости логической формулы

Цели работы:

1. Закрепление теоретических знаний по методам дедуктивного вывода.
2. Получение навыков использования методов дедуктивного вывода.

Ход работы.

1.Определение класса формулы

Среди правильно построенных формул в зависимости от их истинностного значения различают тождественно истинные, тождественно ложные и выполнимые формулы.

Пример1.1.Таблицей истинности и тождественными преобразованиями определить, к какому классу относится формула $F=(A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to(B\wedge C))$

Решение.

A	B	C	$A\to B$	$A\to C$	$B\wedge C$	$4\wedge 5$	$1\to 6$	$7\to 8$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	1	0	1	1	**1**
0	0	1	1	1	0	1	1	**1**
0	1	0	1	1	0	1	1	**1**
0	1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0	0	0	0	**1**
1	0	1	0	1	0	0	0	**1**
1	1	0	1	0	0	0	0	**1**
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**

Формула принадлежит к классу тождественно истинных(см. столбец 9).

Аналитическое решение состоит в приведении формулы к ДНФ или КНФ и исчислении значения этой формулы.

Рассмотрим решение задачи путем приведения формулы к ДНФ.

$$F=(A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to(B\wedge C))\overset{3.6;2.2}{=}\left(A\vee B\wedge C\right)\to\left(\overline{A}\vee B\wedge C\right)\overset{2.2}{=}$$

$$\overset{2.2}{=}\overline{\left(A\vee B\wedge C\right)}\vee\left(\overline{A}\vee B\wedge C\right)=(\overline{A}\vee\overline{B\wedge C})\vee\left(\overline{A}\vee B\wedge C\right)\overset{1.2}{=}\overline{A}\vee\overline{B\wedge C}\vee B\wedge C\overset{1.8}{=}1$$

Формула принадлежит классу тождественно истинных.

Пример 1.2.Тождественными преобразованиями определить, к какому классу относится формула $\left(\left(X\wedge\overline{Y}\right)\to\left(\overline{Z}\leftrightarrow Y\right)\right)\vee\left(\overline{X}\vee\left(Y\to Z\right)\right)$

Решение

$$\left(\left(X \wedge \overline{Y}\right) \to \left(\overline{Z} \leftrightarrow Y\right)\right) \vee \left(\overline{X} \vee \left(Y \to Z\right)\right) \overset{2.2;2.1}{=} \left(\overline{\left(X \wedge \overline{Y}\right)} \vee \left(\overline{Z} \to Y\right) \wedge \left(Y \to \overline{Z}\right)\right) \vee$$
$$\vee \left(\overline{X} \vee \left(\overline{Y} \vee Z\right)\right) \overset{2.2;2.3}{=} \left(\left(\overline{X} \vee Y\right) \vee \left(Z \vee Y\right) \wedge \left(\overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\right) \vee \left(\overline{X} \vee \left(\overline{Y} \vee Z\right)\right) \overset{3.5}{=}$$
$$\overline{X} \vee Y \vee \overline{Y} \wedge Z \vee Y \wedge \overline{Z} \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z \overset{1.11}{=} \overline{X} \vee Y \vee \overline{Y} \vee Z = 1$$

Формула относится к классу тождественно истинных.

2. Алгоритм перехода от таблицы истинности формулы к её записи в виде СДНФ (СКНФ)

Для того, чтобы осуществить переход от таблицы истинности формулы к её записи в виде **СДНФ** необходимо выполнить следующее:

1) выбрать в таблице такие наборы исходных переменных, на которых истинностное значение формулы равно 1

2) записать элементарные конъюнкции для выбранных наборов переменных; при этом необходимо руководствоваться следующим правилом: если значение входной переменной в наборе - единица, то она записывается в прямой форме, если же значение переменной - нулевое, то - в форме отрицания;

3) полученные конъюнктыобъединить между собой знаками дизъюнкции

Для того, чтобы осуществить переход от таблицы истинности формулы к её записи в виде **СКНФ** необходимо выполнить следующее:

1) выбрать в таблице такие наборы исходных переменных, на которых истинностное значение формулы равно 0

2) записать элементарные дизъюнкции для выбранных наборов переменных; при этом необходимо руководствоваться следующим правилом: если значение входной переменной в наборе - единица, то она записывается в отрицания форме, если же значение переменной - нулевое, то - в прямой форме;

3) полученные дизъюнкты объединить между собой знаками конъюнкты

x	y	z	Ф(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Пример 2. Найти формулу, определяющую функцию Ф(x,y,z), по заданной таблице истинности:

Решение. Используя правило получения формулы алгебры логики из таблицы истинности:

$$\phi(x,y,z) = xyz \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}$$

Упростив эту формулу, получим:
$$yz(x \vee \overline{x}) \vee \overline{x}\overline{z}(y \vee \overline{y}) \vee \overline{x}\overline{y}z = yz \vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y}z = yz \vee \overline{x}$$

Таким образом, искомой формулой функции*Ф(x,y,z)*, можно считать $yz \vee \overline{x}$.

3. Логическое следование из группы формул

Определение Говорят, что формула Q следует логически из формул P1, P2 ,..., Pn , если λ(Q) = 1, при всех тех значениях переменных, при которых λ(Pj) = 1 (j = 1, 2,..., n). т.е. Q принимает значения истины на **каждом** наборе переменных, на котором истинно **каждое** из P1, P2 ,..., Pn одновременно.

Пример 3. Докажите логическое следование $((X \vee Y) \to Z) \vdash (X \to (Y \vee Z))$.

Решение. 1 способ. Для доказательства построим таблицы истинности обеих формул

1	2	3	4	5	6	7
X	Y	Z	$X \vee Y$	$P = 4 \to Z$	$Y \vee Z$	$Q = X \to 6$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Так как Q(X,Y,Z) принимает значение 1 на всяком наборе переменных, на котором значение истины принимает формула P(X,Y,Z), *то* P |— Q.

2 способ. Рассмотрим формулу $((X \vee Y) \to Z) \to (X \to (Y \vee Z))$.

С помощью равносильных преобразований докажем, что она тождественно истинна.

$$((X \vee Y) \to Z) \to (X \to (Y \vee Z)) \overset{2.2}{=} \overline{(X \vee Y) \to Z} \vee (\overline{X} \vee (Y \vee Z)) \overset{2.2}{=} \overline{\overline{(X \vee Y)} \vee Z} \vee (\overline{X} \vee (Y \vee Z)) \overset{2.4}{=}$$

$$\overset{2.4}{=} ((X \vee Y) \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \vee (Y \vee Z)) \overset{3.5}{=} (X \wedge \overline{Z}) \vee (Y \wedge \overline{Z}) \vee \overline{X} \vee Y \vee Z \overset{1.11}{=} (X \wedge \overline{Z}) \vee \overline{X} \vee Y \vee Z \overset{3.6}{=}$$

$$\overset{3.6}{=} (X \vee \overline{X}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z}) \vee Y \vee Z \overset{1.4}{=} E \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z}) \vee Y \vee Z \overset{1.3}{=} \overline{X} \vee \overline{Z} \vee Y \vee Z \overset{1.8}{=} E$$

Итак, формула $P \to Q$ является тавтологией, следовательно, $P \mid\!\!— Q$.

4. Выяснение справедливости формул дедуктивного вывода

Для того, чтобы выяснить, справедлива ли формула дедуктивного вывода: $\dfrac{f(x,y,z),\ g(x,y,z),\dots,q(x,y,z)}{\Phi(x,y,z)}$, необходимо преобразовать ее в формулу логического следования, а затем показать, что эта формула тождественно истинна.

Пример 4.1. Выяснить, справедлива ли формула $\dfrac{(Z \to X) \wedge (\overline{X} \to \overline{Y}) \wedge (\overline{X} \wedge T)}{\overline{X} \vee T}$

Решение.

$$\left(\left(Z \to X\right) \wedge \left(\overline{X} \to \overline{Y}\right) \wedge \left(\overline{X} \wedge T\right)\right) \to \left(\overline{X} \vee T\right) \overset{2.2}{=} \overline{\left(Z \to X\right) \wedge \left(\overline{X} \to \overline{Y}\right) \wedge \left(\overline{X} \wedge T\right)} \vee \left(\overline{X} \vee T\right) =$$

$$= \overline{\left(Z \to X\right)} \vee \overline{\left(\overline{X} \to \overline{Y}\right)} \vee \overline{\left(\overline{X} \wedge T\right)} \vee \left(\overline{X} \vee T\right) \overset{2.3}{=} \overline{\left(\overline{Z} \vee X\right)} \vee \overline{\left(X \vee \overline{Y}\right)} \vee \left(X \vee \overline{T}\right) \vee \left(\overline{X} \vee T\right) \overset{1.8}{=} 1$$

Формула справедлива

Пример 4.2.Выяснить, справедлива ли формула $\dfrac{\left(Z \to X\right) \wedge \left(\overline{X} \to \overline{Y}\right) \wedge \left(\overline{X} \wedge T\right)}{X \vee \overline{T}}$

Решение

$$\left(\left(Z \to X\right) \wedge \left(\overline{X} \to \overline{Y}\right) \wedge \left(\overline{X} \wedge T\right)\right) \to \left(X \vee \overline{T}\right) \overset{2.2}{=} \overline{\left(Z \to X\right) \wedge \left(\overline{X} \to \overline{Y}\right) \wedge \left(\overline{X} \wedge T\right)} \vee \left(X \vee \overline{T}\right) =$$

$$= \overline{\left(Z \to X\right)} \vee \overline{\left(\overline{X} \to \overline{Y}\right)} \vee \overline{\left(\overline{X} \wedge T\right)} \vee \left(X \vee \overline{T}\right) \overset{2.3}{=} \overline{\left(\overline{Z} \vee X\right)} \vee \overline{\left(X \vee \overline{Y}\right)} \vee \left(X \vee \overline{T}\right) \vee \left(X \vee \overline{T}\right) \overset{3.4}{=}$$

$$\overset{3.4}{=} Z \wedge \overline{X} \vee \overline{X} \wedge Y \vee \left(X \vee \overline{T}\right) = \overline{X} \wedge \left(Y \vee Z\right) \vee \left(X \vee \overline{T}\right) \overset{3.4}{\neq} 1$$

Формула не является справедливой.

5. Алгоритм получения неравносильных логических следствий формулы F

1) для формулы F построить СКНФ;
2) выписать все полные правильные дизъюнкты;
3) построить всевозможные их конъюнкции.

Указанный набор конъюнкций и самих дизъюнктивных одночленов оказывается искомым набором всех логических следствий данной формулы

Пример 5. Привести все неравносильные между собой логические следствия данной формулы $X \to Y, Y \vee Z$:

Решение.

$$X \to Y, Y \vee Z = \left(\overline{X} \vee Y \vee \left(Z \wedge \overline{Z}\right)\right) \wedge \left(Y \vee Z \vee \left(X \wedge \overline{X}\right)\right) \overset{3.6}{=} \overset{3.6}{=} \left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right) \wedge \left(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}\right) \wedge \left(X \vee Y \vee Z\right) - C$$

Ответ: $\left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)$; $\left(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}\right)$; $\left(X \vee Y \vee Z\right)$

ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ «Метод дедуктивного вывода»

1. Укажите вид формулы.

1	$((\bar{Y}\vee\bar{Z})\leftrightarrow X)\wedge(\bar{X}\wedge(Y\to\vec{Z}))$	2	$((X\to Y)\wedge(Y\to\bar{X})\wedge(\bar{Z}\vee\bar{Y}))$
3	$((X\wedge Y\wedge Z)\vee((X\to\bar{Y})\wedge\bar{Z}))$	4	$(((\bar{X}\wedge\bar{Z})\vee(X\wedge Z))\wedge\bar{Y})$
5	$X\leftrightarrow((Y\vee\bar{Z})\to(\overline{X\vee\bar{\bar{Y}}}))$	6	$((X\wedge(Y\to Z))\vee\overline{(X\vee\bar{Z})})$
7	$(X\leftrightarrow(Y\vee\bar{Z})\wedge\bar{X})\to(X\vee\bar{Y})$	8	$((\bar{Y}\vee\bar{Z})\leftrightarrow X)\wedge(Y\to\bar{Z})$
9	$((\bar{X}\to Y)\vee(\bar{Y}\wedge Z)\leftrightarrow(\overline{X\to Z}))$	10	$((X\vee Y\vee\bar{Z})\to(\bar{X}\to Y))$
11	$(\overline{(X\to\bar{Y})\to Z})\leftrightarrow((Y\to\bar{X})\to\bar{Z})$	12	$((X\vee Y\vee\bar{Z})\to(\bar{X}\to Y))$
13	$(((\overline{\bar{X}\vee Y})\wedge Z)\to\bar{X})\vee\bar{Y}$	14	$((X\vee Y\vee Z))\to\bar{X})\to(\overline{Y\wedge Z})$
15	$((X\to\bar{Y})\vee Z)\wedge((\overline{X\wedge Y})\leftrightarrow\bar{Z})$	16	$((X\wedge\bar{Y})\to\bar{Z})\vee(\bar{X}\vee(Y\to Z))$

2. Найти формулу, определяющую функцию Ф(x,y,z) по таблице истинности:

x	y	z	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$	$Ф_4$	$Ф_5$	$Ф_6$	$Ф_7$	$Ф_8$	$Ф_9$	$Ф_{10}$	$Ф_{11}$	$Ф_{12}$	$Ф_{13}$	$Ф_{14}$	$Ф_{15}$
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1

3. Докажите логическое следование. Будут ли верны обратные следования.

1	$(X\vee Y)\to Z\vdash X\to(Y\to Z)$	2	$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee Z)\vdash X\to Y$
3	$(\bar{X}\to Z)\wedge(X\to Y)\vdash X\to(Y\vee Z)$	4	$(X\to Y)\wedge(X\vee Z)\vdash(X\vee Y\vee Z)$
5	$(X\leftrightarrow Y)\wedge(Y\leftrightarrow Z)\vdash(X\wedge Y)\to Z$	6	$(\bar{X}\to Z)\wedge(X\to Y)\vdash X\to Z$
7	$(X\vee Y)\to Z\vdash Y\to(Y\vee Z)$	8	$(X\to Y)\to Z\vdash Y\to(X\vee Z)$
9	$X\to(\bar{Y}\wedge\bar{Z})\vdash(X\wedge Y)\to Z$	10	$(\bar{X}\to Z)\wedge(X\to Y)\vdash(X\wedge Y)\to Z$
11	$(X\to Y)\wedge(X\vee Z)\vdash X\vee Z$	12	$(X\to Y)\to Z\vdash(X\vee Y\vee Z)$
13	$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee Z)\vdash Y\vee Z$	14	$(X\vee Y)\to Z\vdash Y\to Z$
15	$(X\to Y)\wedge(\bar{X}\to Z)\vdash Y\to(X\vee Z)$	16	$(\bar{X}\to Z)\wedge(X\to Y)\vdash(X\wedge Z)\to Y$

4. Выясните, верны ли следующие формулы

1	$\dfrac{Z \to T, T \to \overline{Y}, X \to (Y \vee Z)}{X \to Y}$	2	$\dfrac{Z \to X, \overline{X} \to \overline{Y}, \overline{X} \wedge T}{\overline{Z} \wedge \overline{Y}}$
3	$\dfrac{T \to \overline{Z}, Z \to \overline{Y}, X \to (Y \vee T)}{Z \to X}$	4	$\dfrac{Y \to X, Z \to \overline{T}, T \vee \overline{X}}{Y \to \overline{Z}}$
5	$\dfrac{X \to Y, Z \to \overline{T}, T \vee \overline{Y}}{X \to \overline{Z}}$	6	$\dfrac{Z \to X, Y \wedge T, \overline{Z} \to \overline{T}}{\overline{X} \wedge T}$
7	$\dfrac{X \to Z, Y \leftrightarrow \overline{T}, Z \to T}{\overline{X} \vee \overline{Y}}$	8	$\dfrac{\overline{X} \to Z, \overline{Z} \to \overline{Y}, Z \wedge T}{\overline{X} \to \overline{Y}}$
9	$\dfrac{\overline{X} \to \overline{Z}, Y \leftrightarrow \overline{T}, \overline{Z} \to \overline{T}}{X \vee Y}$	10	$\dfrac{\overline{X} \to \overline{Z}, Y \leftrightarrow \overline{T}, \overline{Z} \to T}{X \to Y}$
11	$\dfrac{X \to Z, \overline{Z} \to \overline{Y}, \overline{Z} \wedge T}{\overline{X} \wedge \overline{Y}}$	12	$\dfrac{X \to Z, Y \leftrightarrow T, Z \to T}{\overline{X} \vee \overline{Y}}$
13	$\dfrac{Y \to X, Z \to \overline{T}, T \wedge \overline{X}}{Y \to X}$	14	$\dfrac{X \to Y, Z \to \overline{T}, T \vee \overline{Y}}{\overline{X} \wedge T}$
15	$\dfrac{Y \to X, T \to Z, Y \vee T}{\overline{X} \to Z}$	16	$\dfrac{Z \to X, \overline{X} \to \overline{Y}, \overline{X} \wedge T}{X \vee \overline{T}}$

5. Найдите следствия из данных посылок.

1	$X \wedge Y, Y \vee \overline{X}, X$	2	$(X \wedge Y) \to Z, Y \vee X$
3	$Y \vee \overline{X}, X \vee Y$	4	$X \leftrightarrow Y, \overline{X}$
5	$X \vee Y, X \wedge \overline{Y}$	6	$X \vee Y, X \vee Z$
7	$Y \to X, Y \to Z$	8	$(Z \wedge Y) \to X, X \to Y$
9	$Y \to X, Z \to X$	10	$Y \to X, Z \to X$
11	$Y \to X, X \to (Y \vee Z)$	12	$Y \to X, X \to (Y \vee Z)$
13	$(X \wedge Y) \to Z, X \to Y$	14	$Y \to X, Y \to Z$
15	$X \to \overline{Y}, X \to \overline{Z}$	16	$X \to Y, Y \vee Z$

Практическое занятие №7

Тема: Использование метода резолюций вывода для установления непротиворечивости (выявления противоречия) логической формулы

Цели работы:

1. Закрепление теоретических знаний о методе резолюции.
2. Научиться применять метод резолюции для решения простейших задач исчисления высказываний.

Оборудование и принадлежности: индивидуальное задание, листы формата А 4.

Метод резолюций применяется для доказательства следования формулы G из формул $F_1, F_2, ..., F_k$. Доказательство осуществляется методом от противного.

Сначала составляется множество формул $F_1, F_2, ..., F_k, \overline{G}$

Затем каждая из этих формул приводится к КНФ (конъюнкция дизъюнктов) и в полученных формулах зачеркиваются знаки конъюнкции. Получается множество дизъюнктов S.

И, наконец, ищется вывод пустого дизъюнкта из S. Если пустой дизъюнкт выводим из S, то формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, ..., F_k$.

Пример 1.

Доказать следование: $A \to B;\ B \to C;\ C \oplus \overline{D} \mid - \overline{A} \to (B \to D)$

Посылки: $A \to B = \overline{A} \vee B;\ B \to C = \overline{B} \vee C;\ C \oplus \overline{D} = (C \vee \overline{D}) \wedge (\overline{C} \vee D);$

Дизъюнкты посылок: $\overline{A} \vee B;\ \overline{B} \vee C;\ C \vee \overline{D};\ \overline{C} \vee D$

Отрицание заключения: $\overline{\overline{A} \to (B \to D)} = \overline{A \vee (\overline{B} \vee D)} = \overline{A} \wedge B \wedge \overline{D}$

Дизъюнкты отрицания заключения $\overline{A};\ B;\ \overline{D}$

$K_1 = 1)\ \overline{A} \vee B;\ \ 2)\ \overline{B} \vee C;\ \ 3)\ C \vee \overline{D};\ \ 4)\ \overline{C} \vee D;\ \ 5) \overline{A};\ \ 6)\ B;\ \ 7)\ \overline{D}$

$\mathrm{Re}\, s_1 = B; (\overline{B} \vee C) = C -$ из 2) и 6) K_1;

$\mathrm{Re}\, s_2 = \overline{D}; (\overline{C} \vee D) = \overline{C} -$ из 4) и 7) K_1

$K_2 = 1)\ \overline{A} \vee B;\ \ 2)\ C;\ \ 3)\ C \vee \overline{D};\ \ 4)\ \overline{C};\ \ 5) \overline{A};\ \ 6)\ B;\ \ 7)\ \overline{D}$

$\mathrm{Re}\, s_3 = C; \overline{C} = \square$- пустая резольвента из 2 и 4 K_2;

Следование доказано.

Пример 2.

Доказать следование: $A \to (B \to C);\ A \oplus \overline{B};\ A;\ B \mid - (\overline{B} \vee C) \to \overline{A}$

Посылки: $A \to (B \to C) = A \to (\overline{B} \vee C) = \overline{A} \vee \overline{B} \vee C;\ A \oplus B = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$

Дизъюнкты посылок: $\overline{A} \vee \overline{B} \vee C;\ A \vee \overline{B};\ \overline{A} \vee B;\ A;\ B$

Отрицание заключения: $\overline{(\overline{B} \vee \overline{C}) \to \overline{A}} = \overline{\overline{(\overline{B} \vee \overline{C})} \vee \overline{A}} = \overline{\overline{(\overline{B} \vee \overline{C})}} \wedge \overline{\overline{A}} = (\overline{B} \vee \vec{C}) \wedge A$

Дизъюнкты отрицания: $\overline{B} \vee C;\ A$

$K_1 = 1)\ \overline{A} \vee \overline{B} \vee C;\ \ 2)\ A \vee \overline{B};\ \ 3)\ \overline{A} \vee B;\ \ 4)\ \overline{B} \vee \overline{C};\ \ 5)\ A;\ \ 6)\ B$

$\operatorname{Re}s_1 = A;\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\right)=\overline{B}\vee C$ – из 1) и 5) K_1;
$\operatorname{Re}s_2 = B;\left(\overline{B}\vee\overline{C}\right)=\overline{C}$ – из 4) и 6) K_1;
$K_2 =$ 1) $\overline{B}\vee C$; 2) $A\vee\overline{B}$; 3) $\overline{A}\vee B$; 4) $\overline{C}$; 5) A; 6) B
$\operatorname{Re}s_3 = B;\left(\overline{B}\vee C\right)=C$ – из 1) и 6) K_2;
$K_3 =$ 1) C; 2) $A\vee\overline{B}$; 3) $\overline{A}\vee B$; 4) $\overline{C}$; 5) A; 6) B

$\operatorname{Re}s_4 = C;\overline{C}$ – □- пустая резольвентаиз 1 и 4 K_3
Следование доказано

Задания к практическому занятию «Метод резолюций»
Задание 1. Докажите, что имеет место следующее логическое следование. Выясните, будут ли верны обратные следования

В-т	Задание	В-т	Задание
1	$(\overline{X}\to Z)\wedge(X\to Y)\vdash(X\wedge Z)\to Y$	9	$(\overline{X}\vee Y)\wedge(X\vee Z)\vdash X\to Y$
2	$(\overline{X}\to Z)\wedge(X\to Y)\vdash X\to(Y\vee Z)$	10	$(X\to Y)\wedge(X\vee Z)\vdash(X\vee Y\vee Z)$
3	$(X\leftrightarrow Y)\wedge(Y\leftrightarrow Z)\vdash(X\wedge Y)\to Z$	11	$(\overline{X}\to Z)\wedge(X\to Y)\vdash X\to Z$
4	$(X\vee Y)\to Z\vdash Y\to(Y\vee Z)$	12	$(X\to Y)\to Z\vdash Y\to(X\vee Z)$
5	$X\to(\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vdash(X\wedge Y)\to Z$	13	$(\overline{X}\to Z)\wedge(X\to Y)\vdash(X\wedge Y)\to Z$
6	$(X\to Y)\wedge(X\vee Z)\vdash X\vee Z$	14	$(X\to Y)\to Z\vdash(X\vee Y\vee Z)$
7	$(\overline{X}\vee Y)\wedge(X\vee Z)\vdash Y\vee Z$	15	$(X\vee Y)\to Z\vdash Y\to Z$
8	$(X\to Y)\wedge(\overline{X}\to Z)\vdash Y\to(X\vee Z$	16	$(X\vee Y)\to Z\vdash X\to(Y\to Z)$

Задание 2. Методом от противного выясните, верны ли следующие формулы

В-т	Задание	В-т	Задание
1	$\dfrac{Z\to X,\overline{X}\to\overline{Y},\overline{X}\wedge T}{X\vee\overline{T}}$	9	$\dfrac{Z\to X,\overline{X}\to\overline{Y},\overline{X}\wedge T}{\overline{Z}\wedge\overline{Y}}$
2	$\dfrac{T\to\overline{Z},Z\to\overline{Y},X\to(Y\vee T)}{Z\to X}$	10	$\dfrac{Y\to X,Z\to\overline{T},T\vee\overline{X}}{Y\to\overline{Z}}$
3	$\dfrac{X\to Y,Z\to\overline{T},T\vee\overline{Y}}{X\to\overline{Z}}$	11	$\dfrac{Z\to X,Y\wedge T,\overline{Z}\to\overline{T}}{\overline{X}\wedge T}$
4	$\dfrac{X\to Z,Y\leftrightarrow\overline{T},Z\to T}{\overline{X}\vee\overline{Y}}$	12	$\dfrac{\overline{X}\to Z,\overline{Z}\to\overline{Y},Z\wedge T}{\overline{X}\to\overline{Y}}$
5	$\dfrac{\overline{X}\to\overline{Z},Y\leftrightarrow\overline{T},\overline{Z}\to\overline{T}}{X\vee Y}$	13	$\dfrac{\overline{X}\to\overline{Z},Y\leftrightarrow\overline{T},\overline{Z}\to T}{X\to Y}$
6	$\dfrac{X\to Z,\overline{Z}\to\overline{Y},\overline{Z}\wedge T}{\overline{X}\wedge\overline{Y}}$	14	$\dfrac{X\to Z,Y\leftrightarrow T,Z\to T}{\overline{X}\vee\overline{Y}}$

7	$\dfrac{Y\to X, Z\to \overline{T}, T\wedge \overline{X}}{Y\to X}$	15	$\dfrac{X\to Y, Z\to \overline{T}, T\vee \overline{Y}}{\overline{X}\wedge T}$
8	$\dfrac{Y\to X, T\to Z, Y\vee T}{\overline{X}\to Z}$	16	$\dfrac{Z\to T, T\to \overline{Y}, X\to (Y\vee Z)}{X\to Y}$

Задание 3. Методом от противного докажите справедливость следующих формул

В-т	Задание
1	$A\vee C\to B;\ C\to A\vee B;\ B\wedge C\to A\vee \overline{B} \vdash \overline{B}\to C$
2	$A\to B\vee \overline{A};\ C\wedge \overline{B} \vdash (\overline{A}\to B)\vee \overline{C}$
3	$A\to B;\ \overline{B}\to \overline{C};\ B\vee \overline{C} \vdash (C\to A)\to (C\to B)$
4	$A\to (B\to C);\ A\oplus D \vdash \overline{C}\to (D\vee \overline{B})$
5	$A\wedge \overline{B};\ C\to \overline{D};\ B\vee D \vdash (\overline{A}\to \overline{D})\wedge \overline{C}$
6	$A\wedge \overline{C}\to B;\ C\to \overline{A}\wedge B;\ B\wedge C\to (A\to \overline{B}) \vdash A\to (B\to \overline{C})$
7	$(A\to B)\vee D;\ C\wedge \overline{B};\ C\to D;\ D \vdash (\overline{A}\to D)\wedge \overline{B}$
8	$(A\to B)\vee D;\ C\oplus \overline{B};\ C\to \overline{D};\ D\wedge B \vdash (\overline{A}\to D)\wedge \overline{B}$
9	$A\to B\wedge C; B\to D; C\oplus E;\ \overline{A}\to \overline{C} \vdash (D\vee E)\wedge C$
10	$A\to B;\ B\to C;\ C\oplus \overline{D} \vdash \overline{A}\to (\overline{D}\vee C)$
11	$A\to B\wedge \overline{C}; B\to D; C\to E;\ \overline{A}\to F;\ C \vdash (D\wedge E)\vee F$
12	$T\to \overline{Z}; \overline{Y}\to Z; X\to (Y\vee T) \vdash \overline{Z}\vee X$
13	$Z\to X; Y\wedge T; \overline{Z}\to \overline{T} \vdash X\vee T$
14	$(\overline{X}\to Z)\wedge X\to Y) \vdash (X\vee Z)$
15	$A\to B;\ B\to C;\ C\oplus \overline{D} \vdash \overline{A}\to (B\to D)$

Практическое занятие №8-9

Темы: **«Предикаты, их области определения и множества истинности»**

«Построение формул алгебры предикатов»

Понятие предиката.

В алгебре логики высказывания рассматриваются как нераздельные целые и только с точки зрения их истинности или ложности. Например, в рассуждении "Всякий ромб – параллелограмм; ABCD – ромб; следовательно, ABCD - параллелограмм " посылки и заключение являются элементарными высказываниями логики высказываний и с точки зрения этой логики рассматриваются как целые, неделимые, без учета их внутренней структуры. Следовательно, алгебра логики, будучи важной частью логики, оказывается недостаточной в анализе многих рассуждений.

Логика предикатов, как и традиционная формальная логика, расчленяет элементарное высказывание на субъект (буквально - подлежащее, хотя оно может играть и роль дополнения) ипредикат (буквально - сказуемое, хотя оно может играть и роль определения). Субъект – это то, о чем что-то утверждается в высказывании; предикат – это то, что утверждается о субъекте.

Кванторы

Пусть *P(x)* - определенный на множестве ***M*** одноместный предикат. Тогда выражение $\forall x P(x)$ *)* читается: "для всех *x P(x)",* или "для любого *x P(x)*", или "для каждого *x P(x)".* $\forall x P(x)$ - высказывание истинное, когда *P(x)* истинно для каждого *x* из ***M*** и ложное - в противном случае. Символ $\forall x P(x)$ называется *квантором всеобщности.*

Выражение $\exists x P(x)$ читается "существует *x* такое, что *P(x)"* или "хотя бы для одного *x P(x)*", или "для некоторого (некоторых) *x P(x)".* $\exists x P(x)$ - высказывание, которое истинно, если *P(x)* принимает значение *И* хотя бы для одного значения переменной $x \in M$, и ложно, если *P(x)* для всех значений переменной *x* принимает значение *Л.* $\exists x P(x)$ -*квантор существования,* он *двойственен* квантору $\forall x P(x)$ и наоборот.

При использовании кванторов требуется определенная аккуратность и правильное понимание контекста. В естественном языке часто слово "все" опускается. Так, например, предложение "рыбы дышат жабрами" означает, что все рыбы дышат жабрами или что каждая рыба дышит жабрами. Поэтому при символизации необходимо ввести квантор общности. Таким бразом, если положить для множества живых существ, что *R(x)* означает *"x* - рыба", а *G(x)* - *"x* дышит жабрами", то имеем $\forall x R(x) \wedge G(x(x)$. Но в то же время не в каждом случае слова "все" понимаются как "каждый". Например, "все песчинки образуют кучи пуска" не означает, что каждая песчинка образует кучи песка, следовательно, при символизации нельзя употреблять квантор $\forall x$, как это сделано в предыдущем примере.

В языке слово "все" имеет два значения: "любой, каждый" и "все вместе".

Квантор $\forall x$применяется для первого значения. Из изложенного следует, что " $\forall xP(x)$" служит обозначением для следующих высказываний:
для всех *x* выполняется (имеет место) *P(x);*
для каждого *x* выполняется (имеет место) *P(x);*
для любого *x* выполняется (имеет место) *P(x);*
для произвольного *x* выполняется (имеет место) *P(x);*
каково бы ни было *x* выполняется (имеет место) *P(x).*
Все приведенные случаи относятся к применению квантора всеобщности
Теперь рассмотрим случаи применения квантора существования
В языке слово "некоторый", так же как и "все", часто опускается. Например, предложение "люди побывали на Луне" означает, что некоторые люди побывали на Луне. Запись $\exists xP(x)$ служит обозначением для следующих высказываний:
для некоторых *x* (имеет место) *P(x);*
существует *x,* для которого *P(x);*
найдется *x,* для которого *P(x);*
хотя бы для одного *x* (верно) *P(x);*
имеется *x,* для которого *P(x).*
Рассмотрим следующие часто встречающиеся предложения и справа от них приведем их символическую запись:
(A) все *S*суть *P* - $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$;
(E) ни одно *S*не есть *P* - $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$;
(I) некоторые *S*суть *P* - $\exists x(S(x) \wedge P(x))$;
(O) некоторые *S*не есть *P* - $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$.
До сих пор мы рассматривали приписывание кванторов к одноместным предикатам. Далее рассмотрим приписывание кванторов к многоместным предикатам. Пусть $P(x_1,x_2,...,x_n)$ -n-местный $(n>2)$ предикат, заданный на множестве ***M.***
Выражение $\forall x_iP(x_1 ,x_2,.x_{i-1}, x_{i+1}.,,x_n)$, $1 \le i \le n$, (2.1) является $(n-1)$-местным предикатом, зависящим от (свободных) переменных $x_1,x_2,.x_{i-1}, x_{i+1}..,x_n$, причем высказывание $\forall x_iP(a_1,a_2,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n)$ истинно тогда, когда истинно высказывание $P(a_1,a_2,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n)$ (2.2).
Выражение $x_iP(x_1 ,x_2,.. x_{i-1}, x_{i+1,..,}x_n)$, $1 \le i \le n$,, (2.3) является $(n-1)$ местным предикатом, зависящим от переменных $x_1,x_2,..,x_{i-1},..x_{i+1}.,x_n$, причем высказывание $\exists x\ x_iP(a_1,a_2,..,a_{i-1},a_{i+1}..,a_n)$ истинно тогда и только тогда, когда существует такое значение a_iпеременной x_iдля которого высказывание (2.2) истинно.
Приписывание (навешивание) квантора по переменной *x* связывает переменную *x.* Приписывая к n-местным предикатам любой квантор по любой из свободных переменных, получим (n-1)-местные предикаты (если n=1, то просто высказывание). Ясно, что к полученным предикатам можно снова приписать произвольные кванторы и т.д. Приписав кванторы по всем переменным, получим высказывание. Например, пусть на множестве действительных чисел задан трехместный предикат $x^2+y^2 \ge z^2$, который можно превратить в двуместный предикат, записав квантор: $\forall z(x^2+y^2 \ge z^2)$ или превратить в одноместный

предикат $\forall y \forall z(x^2+y^2 \geq z^2)$, или же превратить в высказывание:

$\forall x \forall y \forall z(x^2+y^2 \geq z^2)$. (2.4)

можно получить и другие высказывания, например:

$\exists x \forall y \forall z(x^2+y^2 \geq z^2)$, (2.5)

$\forall x \forall y \exists z(x^2+y^2 \geq z^2)$ (2.6) и т.д.

Высказывание (2.6) истинно, а (2.4) и (2.5) - ложные.

Пусть множество Mсостоит из конечного числа элементов. Для определенности положим $M= \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и пусть $P(x)$ -заданный на Mодноместный предикат. Тогда, очевидно, имеем:

$\forall xP(x)$ равносильно $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$, (2.7)

$\exists xP(x)$ равносильно $P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee (a_n)$. (2.8)

Следовательно, квантор всеобщности является обобщением (аналогом) конъюнкции, а квантор существования - обобщением (аналогом) дизъюнкции на произвольное множество.

Алгоритм приведения формулы к виду ПНФ

Шаг1. Исключить логические связки $\leftrightarrow$ и $\rightarrow$ по правилам:

$(F_1 \leftrightarrow F_2)=(F_1 \rightarrow F_2)\& (F_2 \rightarrow F_1)=(\rceil F_1 \vee F_2)\&(\rceil F_2 \vee F_1)$;

$(F_1 \rightarrow F_2)=(\rceil F_1 \vee F_2)$;

Шаг 2. Продвинуть отрицание до элементарной формулы по правилам:

$\rceil\forall x(F)=\exists x(\rceil F)$; $\rceil(F_1 \vee F_2)=(\rceil F_1 \& \rceil F_2)$;

$\rceil\exists x(F)=\forall x(\rceil F)$;. $\rceil(F_1 \& F_2)=(\rceil F_1 \vee \rceil F_2)$;

Шаг 3. Переименовать связанные переменные по правилу: “найти самое левое вхождение предметной переменной такое, что это вхождение связано некоторым квантором, но существует еще одно вхождение этой же переменной; затем сделать замену связанного вхождения на вхождение новой переменной“,операцию повторять пока возможна замена связанных переменных;

Шаг 4. Вынести кванторы влево по законам алгебры логики.

Шаг 5. Преобразовать бескванторную матрицу к виду КНФ. Алгоритм приведения матрицы формулы к виду КНФ приведен в алгебре высказываний.

<u>**Пример:**</u>$F=(\forall_x(P_1 (x)\rightarrow\forall_y(P_2 (y)\rightarrow P_3 (z))))\&(\rceil\forall_y(P^2{}_4 (x;y)\rightarrow P_5.(z)))$.

Привести формулу к виду ПНФ.

l) удалить логические связки “$\rightarrow$”:

$F=(\forall_x(\rceil P_1 (x)\vee\forall_y(\rceil P_2 (y)\vee P_3 (z))))\&(\rceil\forall_y(\rceil P^2{}_4 (x; y)\vee P_5.(z)))$;

2) применить закон де Моргана $\rceil\forall_x(F(x))=\exists_{x(}\rceil F(x))$:

$F=(\forall_x(\rceil P_1.(x)\vee\forall_y(\rceil P_2 (y)\vee P_3 (z))))\&(\exists_y(\rceil(\rceil P^2{}_4 (x; y)\vee P_5.(z)))$;

3) применить закон де Моргана $\rceil(F_1\vee F_2)=(\rceil F_1\&\rceil F_2)$:

$F=\forall_x(\rceil P_1.(x)\vee\forall_y(\rceil P_2 (y)\vee P_3 (z)))\&(\exists_y(P^2{}_4 (x; y)\&(\rceil P_5.(z))))$

4) переименовать связанную переменную x=w: $F=\forall_w(\rceil P_1(w)\vee\forall_y(\rceil P_2(y)\vee P_3(z)))\&(\exists_y(P^2{}_4(x;y)\&(\rceil P_5(z))))$;

5) переименовать связанную переменную y=v: $F=\forall_w(\rceil P_1 (w)\vee\forall_v(\rceil P_2 (v)\vee P_3 (z)))\&(\exists_y(P^2{}_4 (x; y)\&(\rceil P_5.(z))))$;

6) вынести квантор $\forall_v$ влево: $F=\forall_w\forall_v(\rceil P_1 (w)\vee\rceil P_2 (v)\vee P_3 (z))\&(\exists_y(P^2{}_4 (x;$

y)&(⌉P_5.(z))));

7) вынести квантор $\exists_y$ влево: $F=\forall_w\forall_v\exists_y(\rceil P_1(w)\vee\rceil P_2(v)\vee P_3(z))\&P^2_4(x;y)\&\rceil P_5.(z)$.

Матрица ПНФ содержит три элементарных дизъюнкта: $K=\{(\rceil P_1(w)\vee\rceil P_2(v)\vee P_3(z)); P_4(x;y); \rceil P_5.(z)\}$.

Пример использования алгебры предикатов

Задача1.Пусть $x \in$ {люди}, $y \in$ {вещи, которые можно читать и писать}. На этих областях определения заданы предикаты:

P(x): x – профессор,	*S(x): x – студент,*
V(x): x – поэт,	*R(x, y): x пишет y,*
W(x, y): x любит читать y,	*N(y): y – роман,*
K(y): y – конспект,	*C(y): y – стихи,*
U(y): y – учебник,	*L(y): y – письмо,*
H(y): y – шпаргалка.	

Следующие высказывания записать в виде формул логики предикатов.

Пример.

Некоторые учебники представляют собой конспекты —	$\exists y(U(y)\ \&\ K(y))$;
Ни один роман не является учебником —	$\forall y(N(y)\to\neg U(y))$;
Каждый читает какие-нибудь учебники —	$\forall x\exists y(U(y)\ \&\ W(x,y))$;
Некоторые студенты читают только учебники —	$\exists x(S(x)\ \&\ \forall y(W(x,y)\to U(y)))$;
Пушкин писал и стихи, и романы —	$\forall y(C(y)\vee N(y)\to R(\text{Пушкин},y))$;
Студент Боб не пишет письма —	$S(\text{Боб})\ \&\ \forall y(L(y)\to\neg R(\text{Боб},y))$;
Студент Боб читает только конспекты —	$S(\text{Боб})\ \&\ \forall y(W(\text{Боб},y)\to K(y))$;
Любой поэт пишет письма —	$\forall x(V(x)\to\forall y(L(y)\to R(x,y)))$.

Задания к практическому занятию № 8 **Предикаты, их области определения и множества истинности**

Задание 1. Представьте следующие выражения в виде формулы *алгебры предикатов* и укажите их область определения и множество истинности. Определить, истинно или ложно высказывание в заданной интерпретации переменных

Вар-т	Задание
1	Существуют числа x и y, для которых $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2	Река xвпадает в озеро Байкал
3	Существуют числа x, для которых $x^2 + x - 6 = 0$
4	Для всех x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$
5	Существуют числа, для которых выполняется неравенство $x^2 + x - 6 \geq 0$
6	Существует такое отрицательное число x, что $x^2 + x - 6 = 0$
7	Существуют числа, для которых $(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$
8	Существуют числа, для которых $(x+1)(x^2 - x + 1) > 0$
9	Существуют числа, для которых $(x-2)(x^2 + x + 1) > 0$
10	Существуют числа, для которых $(x-2)(x^2 + x + 1) \leq 0$
11	Существует такое отрицательное число x, для которого выполняется равенство $x^2 - x - 6 = 0$
12	Существует такое положительное число x, что $x^2 - 7x + 10 = 0$
13	Существуют такие положительные числа, что $x^2 - 7x + 10 \geq 0$
14	Для всех действительных чисел x и y выполняется соотношение $(x+y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
15	Река х впадает в Онежское озеро.
16	Для всех действительных чисел x и y выполняется соотношение $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Задание 2. Изобразите на координатной прямой *множества истинности* следующих заданных на ***R*** одноместных предикатов.

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание
1	$x < 3$	2	$\|x\| = 4$
3	$\|x\| < 2$	4	$\|x\| > 2$
5	$\|x-4\| \geq 1$	6	$\|x+3\| < 2$
7	$x^2 \geq 0$	8	$x + 3 \leq 2x - 7$
9	$x - 5 \geq 2x + 4$	10	$(x-3)(x+3) \leq 16$
11	$(x-3)(x+3) \geq 16$	12	$3x(x+1) \geq 0$
13	$\|x\| = 5$	14	$\|x\| < 5$

15	$\lvert x \rvert \geq 5$	16	$< 1 \lvert x \rvert < 2$

Задание 3. Изобразите на координатной плоскости *множества истинности* следующих заданных на $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ предикатов:

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание
1	$(x \geq 0) \wedge (y \leq 0)$	2	$(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$
3	$(x \leq 0) \wedge (y \geq 0)$	4	$(x \geq 0) \vee (y \leq 0)$
5	$(x \geq 0) \vee (y \geq 0)$	6	$(x \leq 0) \vee (y \geq 0)$
7	$(x \geq 0) \rightarrow (y \leq 0)$	8	$(x \geq 0) \rightarrow (y \geq 0)$
9	$(x \leq 0) \rightarrow (y \geq 0)$	10	$(x \geq 0) \leftrightarrow (y \leq 0)$
11	$(x \geq 0) \leftrightarrow (y \geq 0)$	12	$(x \leq 0) \leftrightarrow (y \geq 0)$
13	$(x \leq 0) \rightarrow (y \leq 0)$	14	$(x \leq 0) \vee (y \leq 0)$
15	$(x \leq 0) \leftrightarrow (y \leq 0)$	16	$(x \leq 0) \wedge (y \leq 0)$

Задание 4. Имеются следующие утверждения о предикатах $P(x)$ и $Q(x)$: (1) $P(x)$ является следствием $Q(x)$, но не обратно; (2) Q(x) является следствием $P(x)$, но не обратно; (3) предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны (эквивалентны); (4) ни одно из сформулированных утверждений не верно. Выясните, какое из этих утверждений справедливо для следующих предикатов, заданных над множеством действительных чисел $\boldsymbol{R}$:

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание
1	$P(x):\ x^2 - x - 6 = 0$; $Q(x):\ (x-3)(x+2) \geq 0$	5	$P(x):\ x^3 < 64$; $Q(x):\ x^2 \leq 16$
2	$P(x):\ x^2 - 9 = 0$; $Q(x):\ x^4 = 81$	6	$P(x): x - 3 > 0$; $Q(x): x^2 - 9 > 0$
3	$P(x):\ x^2 + 3x - 10 = 0$; $Q(x):\ \lvert x \rvert = 2$	7	$P(x):\ x = -5$; $Q(x): x^2 + 3x - 10 = 0$
4	$P(x):\ (x-3)(x+4) < 0$; $Q(x):\ x^2 + 4x - 1 \leq 0$	8	$P(x):\ x^2 - 11x + 30 = 0$; $Q(x): x^2 - 25 = 0$
Вар-т	Задание	Вар-т	Задание
9	$P(x):\ x^2 + x - 12 = 0$; $Q(x): x^2 - 6x + 9 = 0$	13	$P(x):\ x^2 + 11x + 30 = 0$; $Q(x):\ x^3 + 125 = 0$
10	$P(x):\ x^3 + 64 < 0$; $Q(x):\ x^2 > 16$	14	$P(x): x^2 + 8x + 9 = 0$ $Q(x):\ x^2 + x - 12 = 0$;
11	$P(x):\ x^3 - 64 < 0$; $Q(x):\ x^2 - 16 < 0$	15	$P(x):\ x^2 - 10x + 25 \geq 0$; $Q(x):\ 2x^2 + 20x + 50 > 0$

12	$P(x):\ x^2-6x+9>0;$ $Q(x):\ x^2+8x+16\ge 0$	16	$P(x):\ x^3+64<0;$ $Q(x):\ x^2>16$

Задание 5. Путем тождественных преобразований перейти к формулам, содержащим только операции: $(\neg)$; $(\wedge)$ и $(\vee)$.

Вар-т	Задание
1	$\forall x\big(A(x)\to\exists y(\neg B(y)\to D(x))\big)$
2	$\forall x\forall y\big(\neg A(x)\to\exists y\big(\neg B(y)\to D(y)\big)\big)$
3	$\forall x\big(\exists y\big(\neg A(x)\to B(y,z)\big)\to C(x)\big)$
4	$\forall x\big(A(x)\to\exists yB(y)\big)\to C(z)$
5	$\forall x\neg A(x)\to\exists y\big(B(y)\to C(y)\big)$
6	$\forall x\big(A(x)\to\forall z\big(A(x)\wedge B(y)\big)\big)$
7	$\forall x\big(A(x)\big)\to\exists y\big(C(y)\to A(x)\big)$
8	$\forall x\neg A(x)\to\exists y\big(\neg B(y)\to C(x)\big)$
9	$\forall x\big(\neg A(x)\to\exists y(B(y)\to\neg C(x)\big)$
10	$\forall x\big(\exists y\big(\neg A(x,y)\to B(y)\to C(x)\big)\big)$
11	$\forall x\big(B(x)\big)\to\exists y\big(A(y)\wedge A(x)\big)$
12	$\forall x(\neg A(x))\to\exists y(\neg B(y)\to\neg C(x))$
13	$\forall x\big(A(x)\to B(y)\wedge\forall z\big(C(z)\big)\big)$
14	$\exists x(\neg A(x))\to\forall y(\neg B(y)\to C(x))$
15	$\forall x\big(A(x)\to\neg B(y)\big)\to\exists y\big(B(y)\big)$

Задания к практическому занятию № 9 **«Построение формул алгебры предикатов» Текст задания**

1. Установить, является ли данное выражение формулой, а если да, то определить, какие переменные в ней свободные, а какие связанные.
2. Даны предикаты: А(x) и B(x). Записать словами предложенные формулы С и D.
3. Данное суждение записать в виде формулы логики предикатов. Построить отрицание данного суждения в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.
4. Найти приведенную и нормальную формулы для данной формулы

Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Задание
1	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x))\&B(y, z))$. 2. $A(x)$ = "x – торговец подержанными автомобилями"; $B(x)$ = "x – нечестный человек". Записать словами: $C = \forall x(A(x)\Rightarrow B(x))$; $D = \exists\ x(B(x)\ \&\ A(x))$. 3. Не всякое действительное число является рациональным. 4. $\forall x(A(x)\Rightarrow\exists y(\neg B(y)))$
Ответ	
2	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x, y)\Rightarrow C(z)\ \&B(y, z)))$. 2. $A(x)$ = "x – торговец наркотиками"; $B(x)$ = "x – наркоман". Записать словами: $C = \forall x(A(x)\Rightarrow B(x))$; $D = \exists x(A(x)\&B(x))$. 3. Каждый студент выполнил хотя бы одну лабораторную работу. 4. $\forall x(\neg A(x)\Rightarrow\exists y(\neg C(y)))$
Ответ	
3	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x)\Rightarrow B(y, z))$. 2. $A(x)$ = "x – рациональное число"; $B(x)$ = "x – действительное число". Записать словами: $C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x)\supset B(x))$. 3. Ни одно четное число, большее 2, не является простым. 4. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x)\Rightarrow B(y, z)))$.
4	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x)\&B(y))\Rightarrow C(y, z))$. 2. $A(x)$ = "x – политик"; $B(x)$ = "x – мошенник". $C = \neg(\forall x(A(x)\supset B(x)))$; $D = \exists x(A(x)\&\neg B(x))$. 3. Выгул собак или кошек запрещен. 4. $\forall x(A(x)\Rightarrow\exists yB(y))$
5	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x,y)\&B(y, z)))$. 2. $A(x)$ = "x – рыба"; $B(x)$ = "x – водное животное". С $= \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x)\Rightarrow B(x))$. 3. Произведение любых двух простых чисел не является простым числом. 4. $\forall x(\neg A(x)\Rightarrow\exists y(B(y))$

Текст задания

1. Установить, является ли данное выражение формулой, а если да, то определить, какие переменные в ней свободные, а какие связанные.
2. Даны предикаты: A(x) и B(x). Записать словами предложенные формулы C и D.
3. Данное суждение записать в виде формулы логики предикатов. Построить отрицание данного суждения в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.
4. Найти приведенную и нормальную формулы для данной формулы

Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Задание
6	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x))\&B(y))$. 2. $A(x)$ = "x – четное число"; $B(x)$ = "x делится на 6". Записать словами: $C = \forall x(B(x) \Rightarrow A(x))$; $D = \neg(\exists x((\neg A(x)\&B(x)))$. 3. Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа. 4. $\forall x(A(x) \Rightarrow \forall z(A(x)\&B(y) \Rightarrow C(z))$
7	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x)) \sim B(y, z))$. 2. $A(x)$ = "x – металл"; $B(x)$ = "x – теплопроводен". Записать словами: $C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$. 3. Каждый, купивший билет, получит премию. 4. $\forall x(A(x) \Rightarrow \forall y(C(y) \Rightarrow A(x)))$
8	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x) \sim B(y, z)))$. 2. $A(x)$ = "x – простое число"; $B(x)$ = "x четное число". Записать словами: $C = \forall x(B(x) \Rightarrow A(x))$; $D = (\exists x((A(x)\&B(x)))$. 3. Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа. 4. $\forall x(\neg A(x) \Rightarrow \exists y(\neg B(y)))$
9	1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x, y)) \sim B(y, z))$. 2. $A(x)$ = "x – студент"; $B(x)$ = "x – сдал экзамены". Записать словами: $C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$. 3. Всякий равносторонний треугольник является равнобедренным. 4. $\forall x(\neg A(x) \Rightarrow \exists y B(y))$.
10	1. $\forall x(\exists y(\neg A(x)\&B(y, z))$. 2. $A(x)$ = "x - деятельность"; $B(x)$ = "x дает счастье". Записать словами: $C = \forall x(B(x) \Rightarrow A(x))$; $D = \neg(\exists x((\neg A(x)\&B(x)))$. 3. Некоторые студенты сдали все зачеты. 4. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x, y) \Rightarrow B(y)))$.

Текст задания

1. Установить, является ли данное выражение формулой, а если да, то определить, какие переменные в ней свободные, а какие связанные.
2. Даны предикаты: A(x) и B(x). Записать словами предложенные формулы С и D.
3. Данное суждение записать в виде формулы логики предикатов. Построить отрицание данного суждения в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.
4. Найти приведенную и нормальную формулы для данной формулы

Варианты индивидуальных заданий

Вари-ант	Задание
11	1. $\neg(\exists x \forall z(A(x, y) \Rightarrow \neg B(y, z))$. 2. $A(x)$ = "x – ученый"; $B(x)$ = "x – мыслит формулами". Записать словами: $C = \forall x(A(x) \Rightarrow \neg B(x))$; $D = \exists x(B(x) \ \& \ A(x))$. 3. Все депутаты голосовали за этот законопроект. 4. $\forall x(B(x) \Rightarrow \exists y(A(y) \& A(x)))$.
12	1. $(x \Rightarrow z) \ \&(\neg y \Rightarrow \neg x)$. 2. $A(x)$ = "x – планета"; $B(x)$ = "x светит собственным светом". Записать словами: $C = \forall x(A(x) \Rightarrow \neg B(x))$; $D = \exists x(A(x) \& \neg B(x))$. 3. Все рыбы живут в воде. 4. $\forall x \neg A(x) \Rightarrow \exists y \neg B(y)$.
13	1. $A(x) \ \& \forall x B(x)$. 2. $A(x)$ = "x – педагог"; $B(x)$ = "x – учитель". Записать словами: $C = \exists x(\neg B(x) \ \& \ A(x))$; $D = \forall x(B(x) \Rightarrow A(x))$. 3. Некоторые абитуриенты поступили в институт. 4. $\forall x(A(x) \Rightarrow B(y)) \& \forall z(C(z))$.
14	1. $\forall x(A(x) \Rightarrow C(x)) \sim \exists x(A(x) \Rightarrow B(x, y))$. 2. $A(x)$ = "x – морское животное"; $B(x)$ = "x дышит жабрами". $C = \neg(\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)))$; $D = \exists x(A(x) \& B(x))$. 3. Студент ответил на некоторые вопросы. 4. $\exists x \neg A(x) \Rightarrow \forall y \neg B(y)$.
15	1. $(A(x) \sim B(x) \vee (\forall y(\exists y D(y))$. 2. $A(x)$ = "x – гриб"; $B(x)$ = "x съедобен". С $= \exists x(A(x) \ \& \ \neg B(x))$; $D = \forall x(A(x) \Rightarrow \neg B(x))$. 3. Автобус останавливается на всех остановках. 4. $\forall x(A(x) \Rightarrow \neg B(y)) \Rightarrow \exists y(B(y) \Rightarrow \neg A(x))$