ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Петрозаводский филиал ПГУПС

ОДОБРЕНО
на заседании цикловой комиссии ЕН
протокол № 8 от 28 апреля 2017,
Председатель цикловой комиссии:
Масайлова (________)

УТВЕРЖДАЮ
Начальник УМО
____________ А.В. Калько
«28» 04 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению практических занятий

по МДК.01.02. Математический аппарат для построения компьютерных сетей

Специальность: 09.02.02 Компьютерные сети

Разработчик: Пуолакайнен Л.М.

2017 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации и проведению практических занятий разработаны в соответствии с рабочей программой профессионального модуля ПМ.01. Проектирование сетевой инфраструктуры и предназначены для выполнения практических занятий обучающимися.

Практические занятия по МДК.01.02. Математический аппарат для построения компьютерных сетей направлены на усвоение знаний, освоение умений и формирование элементов общих компетенций, предусмотренных рабочей программой профессионального модуля.

С целью овладения указанным видом профессиональной деятельности и соответствующими профессиональными компетенциями обучающийся в ходе освоения МДК должен:

иметь практический опыт:

оформления технической документации;

уметь:

применять алгоритмы поиска кратчайшего пути;

планировать структуру сети с помощью графа с оптимальным расположением узлов;

использовать математический аппарат теории графов;

контролировать соответствие разрабатываемого проекта технической документации;

знать:

вероятностные и стохастические процессы, элементы теории массового обслуживания, основные соотношения теории очередей, основные понятия теории графов;

алгоритмы поиска кратчайшего пути;

основные проблемы синтеза графов атак;

построение адекватной модели;

В результате освоения междисциплинарного курса происходит поэтапное формирование элементов общих и профессиональных компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполненных заданий.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.
ПК 1.1. Выполнять проектирование кабельной структуры компьютерной сети.
ПК 1.2. Осуществлять выбор технологии, инструментальных средств и средств вычислительной техники при организации процесса разработки и исследования объектов профессиональной деятельности.
ПК 1.3. Обеспечивать защиту информации в сети с использованием программно-аппаратных средств.
ПК 1.4. Принимать участие в приёмо-сдаточных испытаниях компьютерных сетей и сетевого оборудования различного уровня и в оценке качества и экономической эффективности сетевой топологии.
ПК 1.5. Выполнять требования нормативно – технической документации, иметь опыт оформления проектной документации.

Рабочей программой предусмотрено выполнение обучающимися практических занятий, включая, как обязательный компонент практические задания с использованием персонального компьютера.

Распределение результатов освоения учебного материала в ходе выполнения заданий на практических занятиях происходит в соответствии с таблицей 1.

Элемент модуля	**Контрольно-оценочные мероприятия**	**Результаты**			**Поэтапно формируемые элементы общих и профессиональных компетенций**
		усвоенные знания	**освоенные умения**	**практический опыт**	
Раздел 2. Использование математического аппарата для построения и анализа компьютерных сетей **МДК. 01.02.** «Математический аппарат для построения компьютерных сетей»	Практические занятия № 1-4	вероятностные и стохастические процессы, элементы теории массового обслуживания, основные соотношения теории очередей, основные понятия теории графов; алгоритмы поиска кратчайшего пути; основные проблемы синтеза графов атак; построение адекватной модели;	применять алгоритмы поиска кратчайшего пути; планировать структуру сети с помощью графа с оптимальным расположением узлов; использовать математический аппарат теории графов; контролировать соответствие разрабатываемого проекта технической документации;	оформления технической документации;	ПК 1.3, ПК 1.5. ОК 1. - 9

Содержание практических занятий охватывает весь круг умений и компетенций, на формирование которых направлен МДК. 01.02. Математический аппарат для построения компьютерных сетей

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

При оценке освоенных умений при выполнении практических работ занятий

Оценивание практических занятий производится в соответствии со следующими нормативными актами:

- Положение о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;
- Положение о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий.

Практическое занятие № 1

Тема: Построение матриц смежностей и инциденций, достижимостей, Выделение связных компонентов. Нахождение максимального потока и минимального разреза., путей в графе. максимально независимых множеств (МНМ), кратчайшего пути.

Цели:

1) Отработать на примерах основные понятия теории графов
2) Научить строить графы по матрице смежности
3) По графу составлять матрицу смежности.
4) способствовать достижению более высокого уровня умственного развития студентов, развитие у них способности к самообучению.

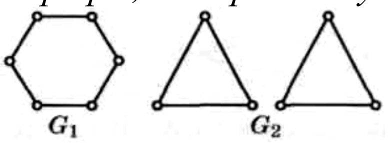
Оборудование: раздаточный материал, карточки.

Задача 1. *Докажите, что в полном графе с n вершинами* $\frac{n(n-1)}{2}$ *рёбер.*

Решение. Каждой вершине в полном графе с n вершинами принадлежит n-1 ребро, но в произведении $n(n-1)$ *каждое ребро учтено дважды (так как одно ребро инцидентно двум вершинам). Следовательно, число рёбер в полном графе с n вершинами равно* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 2. *Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими?*

Решение Участников этой компании изобразим вершиной графа (см. рис.), а отношение знакомства между двумя участниками – ребром. Изобразим графы, которые могут соответствовать данной компании.

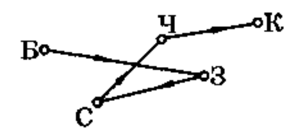


Про граф G_1 *говорят, что он связный, так как из каждой вершины по рёбрам можно попасть в любую другую. Делаем вывод, что в этом случае каждый через своих знакомых может познакомиться со всеми остальными.*

Про граф G_2 *говорят, что он несвязный, так как состоит из двух простых циклов. Делаем вывод, что граф соответствует двум компаниям, участники одной из них могут быть не знакомы с участниками другой.*

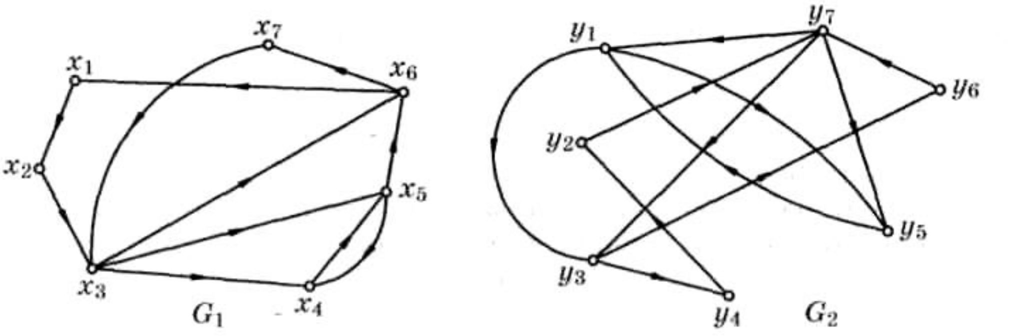
Задача 3. *Из пункта A в пункт B выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, чёрная, красная, синяя, зелёная. Чёрная едет впереди синей, зелёная – впереди белой, но позади синей, красная впереди чёрной. Какая машина едет первой и какая последней?*

Решение. Решаем задачу, построив ориентированный граф для отношения f: «x едет сзади y». На плоскости отметим пять точек, соответствующих каждой машине, и обозначим их первой буквой цвета машины (см. рис.)



Анализируя граф, получаем следующий порядок движения: красная, чёрная, синяя, зелёная, белая.

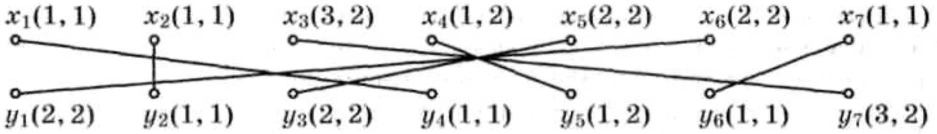
Задача 4. *Пусть даны графы* $G_1(X,Y)$ *и* $G_2(Y,E)$, *изображённый на рисунке.*



Установите, изоморфны ли данные графы.

Решение. Для доказательства того, что граф $G_1(X,Y)$ *изоморфен графу* $G_2(Y,E)$ *необходимо и достаточно выполнение условия: найти такую подстановку, которая граф* G_1 *переводит в граф* G_2.

Запишем элементы $x \in X$ *и* $y \in Y$ *с соответствующими им парами чисел, где первое число – число исходов из вершины, а второе – число заходов в вершину.*



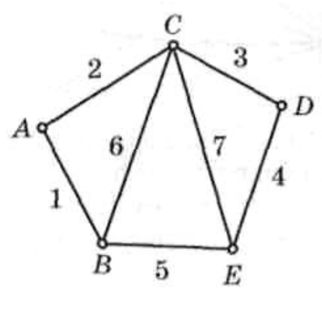
Далее определим частичную подстановку, соединяя вершины x_i *и* y_i *с одинаковыми числами.*

В результате получим подстановку

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ y_4 & y_2 & y_7 & y_5 & y_3 & y_1 & y_6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, графы G_1 *и* G_2 *изоморфны.*

Задача 5. *Для неориентированного графа, изображённого на рисунке, постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности.*



Решение

Матрица смежности

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix} \\
\quad A \quad B \quad C \quad D \quad E
\end{array}$$

Матрица инцидентности

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix} \\
\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7
\end{array}$$

Задача 6.

Задан граф $G(V,E)$, *где* $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$; $E_{v_1}=\{v_1,v_3,v_5\}$; $E_{v_2}=\varnothing$; $E_{v_3}=\{v_1,v_2,v_5\}$; $E_{v_4}=\{v_1\}$; $E_{v_5}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$.

1. Задайте граф с помощью бинарного отношения, т. ею совокупности множества V *и подмножества множества упорядоченных пар* $\langle v_i,v_j\rangle \in V\times V$.

2. Изобразите орграф на рисунке.

3. Постройте матрицу смежности.

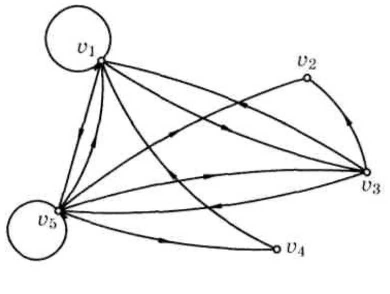
Решение.

1. $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$.

Множество пар:

$$\left\{\begin{matrix}\langle v_1,v_1\rangle;\langle v_1,v_3\rangle;\langle v_1,v_5\rangle;\langle v_3,v_1\rangle;\langle v_3,v_2\rangle;\langle v_3,v_5\rangle;\langle v_4,v_1\rangle; \\ \langle v_5,v_1\rangle;\langle v_5,v_2\rangle;\langle v_5,v_3\rangle;\langle v_5,v_4\rangle;\langle v_5,v_5\rangle\end{matrix}\right\}.$$

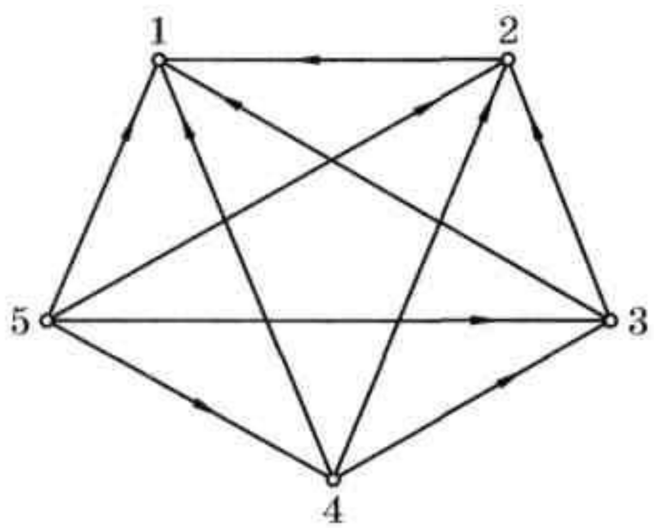
2. См. рисунок.



3. $\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}$

Задача 7.

Дано множество $V=\{1,2,3,4,5\}$. *На этом множестве задано отношение f:* $x>y$. *Постройте орграф данного отношения.*



Решение. Для того чтобы построить орграф данного отношения f: $x > y$, изобразим все элементы множества V точками на плоскости и проведём стрелку от каждого большего числа к меньшему (см. рисунок)

Задача 8. *Дана матрица*

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \end{array}$$

Постройте орграф, для которого данная матрица является матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности орграфа.

Решение. Для построения орграфа его вершине однозначно сопоставим точку на плоскости. Данная матрица смежности имеет четыре строки и четыре столбца, следовательно, в орграфе четыре вершины 1, 2, 3, 4.

Проанализируем элементы матрицы:

$a_{11} = 0 -$ *при вершине 1 нет петель;*

$a_{12} = 2 -$ *из вершины 1 выходят две стрелки к вершине 2;*

$a_{13} = 0 -$ *из вершины 1 не выходит ни одной стрелки к вершине 3;*

$a_{14} = 0 -$ *из вершины 1 не выходит ни одной стрелки к вершине 4;*

$a_{21} = 0 -$ *из вершины 2 не выходит ни одной стрелки к вершине 1;*

$a_{22} = 0 -$ *при вершине 2 нет петель;*

$a_{23} = 1 -$ *из вершины 2 выходит одна стрелка к вершине 3;*

$a_{24} = 0 -$ *из вершины 2 не выходит ни одной стрелки к вершине 4;*

$a_{31} = 1 -$ *из вершины 3 выходит одна стрелка к вершине 1;*

$a_{32} = 0 -$ *из вершины 3 не выходит ни одной стрелки к вершине 2;*

$a_{33} = 0 -$ *при вершине 3 нет петель;*

$a_{34} = 1 -$ *из вершины 3 выходит одна стрелка к вершине 4;*

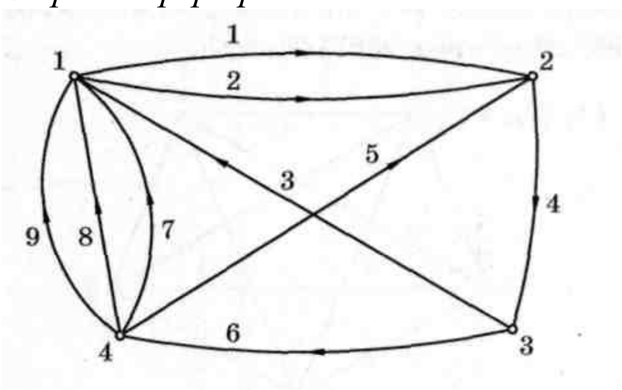
$a_{41} = 3 -$ *из вершины 4 выходит 3 стрелки к вершине 1;*

$a_{42} = 1 -$ *из вершины 4 выходит одна стрелка к вершине 2;*

$a_{43} = 0 -$ *из вершины 4 не выходит ни одной стрелки к вершине 3;*

$a_{44} = 0 -$ *при вершине 4 нет петель.*

Строим орграф.

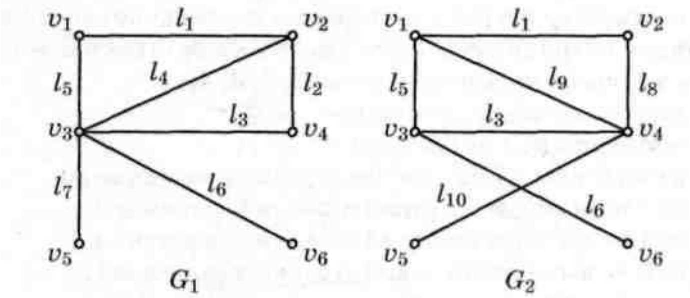


Для построения графа запишем матрицу инцидентности:

$$
\begin{array}{c}
1\\2\\3\\4\\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}\\
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix}
\end{array}
$$

Здесь четыре строки по числу вершин и 9 столбцов по числу дуг.

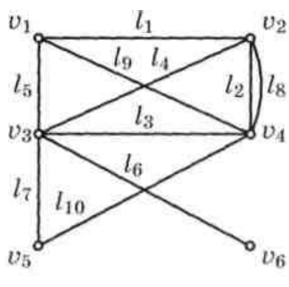
Задача 9. *Пусть даны два графа* $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$



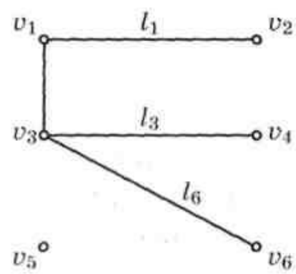
Изобразите геометрически объединение графов $G_1 \cup G_2$; *пересечение графов* $G_1 \cap G_2$ *и сумму по модулю два* $G_1 \oplus G_2$.

Решение

Объединение графов $G_1 \cup G_2$: *(рис. 1)*

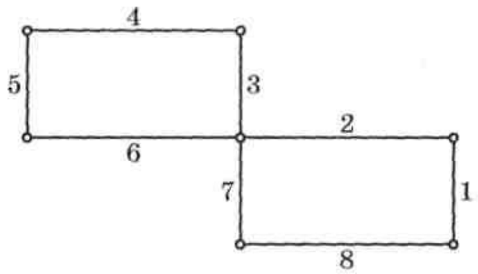


Пересечение графов $G_1 \cap G_2$: *(рис. 2)*



Сумма по модулю два $G_1 \oplus G_2$: *(рис. 3)*

Задача 10. *Найдите эйлеров цикл в эйлеровом графе*



Решение. После выбора вершины a и прохождении рёбер 1 и 2 имеются три возможности выбора: рёбра 3, 6 или 7. Выбираем ребро 3 или 6. Например, ребро 3. Далее обходим оставшиеся рёбра и получаем эйлеров цикл 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Задача 11. *Найдите цикл, содержащий все вершины додекаэдра, причём в точности по одному разу каждую.*

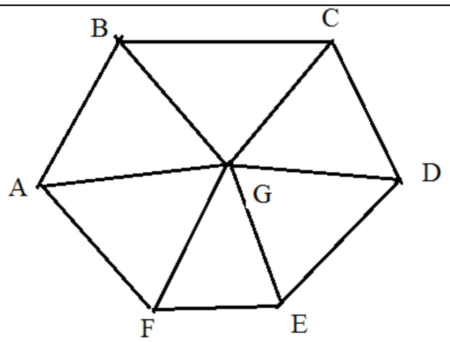
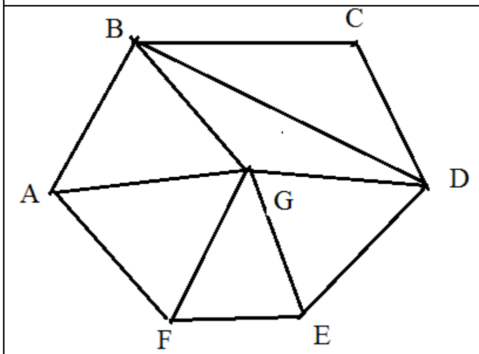
Решение.

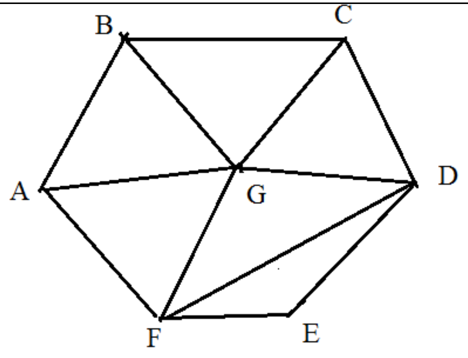
Этот цикл: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20.

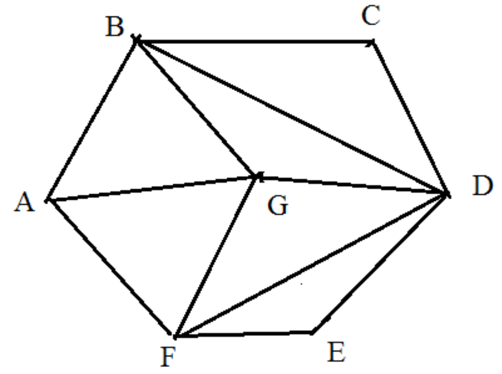
Этот цикл называется гамильтоновым циклом.

Задание

1. Построить матрицу весов и минимальное остовное дерево для графа

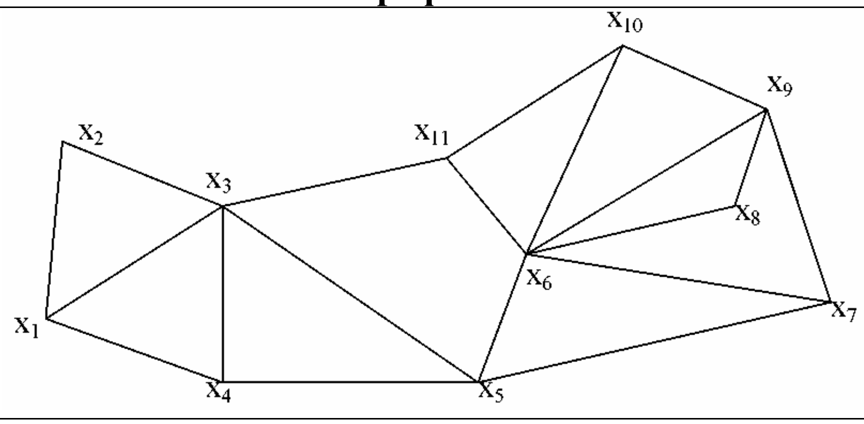
Варианты графов	Варианты весов ребер графа
 1	1) AB=15, BC=14; CD=12; DE=17; EF=14; FA=18; AG=8; BG=11; CG=12; DG=14; EG=11; FG=16;; BD=13; DF=18 2) AB=13, BC=11; CD=19; DE=12; EF=16; EA=14; AG=12; BG=19; CG=14; DG=14; EG=19; FG=21; BD=14; DG=18 3) AB=18, BC=19; CD=22; DE=24; EF=12; FA=18; AG=19; BG=22; GG=16; DG=117; EG=17; FG=16; BD=19; DF=22
 2	4) AB=19, BC=21; CD=17; DE=22; EF=26; FA=20; AG=22; BG=24; CG=25; DG=18; EG=21; FG=22; BD=14; DF=27 5) AB=29, BC=21; CD=29; DE=22; EF=26; FA=24; AG=22; BG=23; CG=25; DG=27; EG=19; FG=21;

<table>
<tr><td>

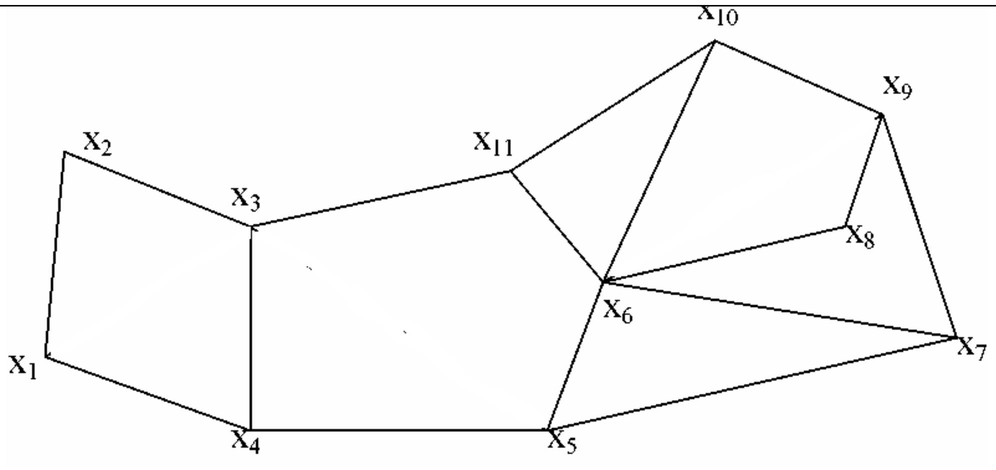
3</td><td rowspan="2">BD=14; DF=18
6) AB=31, BC=10; CD=21; DE=15; EF=20; FA=20; AG=18; BG=17; CG=19; DG=15; EG=21; FG=22; BD=14; DF=27
7) AB=34, BC=22; CD=27; DE=21; EF=29; FA=22; AG=26; BG=24; CG=28; DG=21; EG=24; FG=20; BD=27; DF=25
8) AB=36, BC=21; CD=30; DE=28; EF=24; FA=32; AG=33; BG=35; CG=30; DG=27; EG=24; FG=20; BD=27; DF=29
9) AB=42, BC=48; CD=36; DE=44; EF=36; FA=47; AG=42; BG=44; CG=43; DG=41; EG=39; FG=43; BD=57; DF=58
10) AB=27, BC=29; CD=29; DE=28; EF=26; FA=25; AG=28; BG=232; CG=25; DG=27; EG=29; FG=25; BD=24; DF=28</td></tr>
<tr><td>

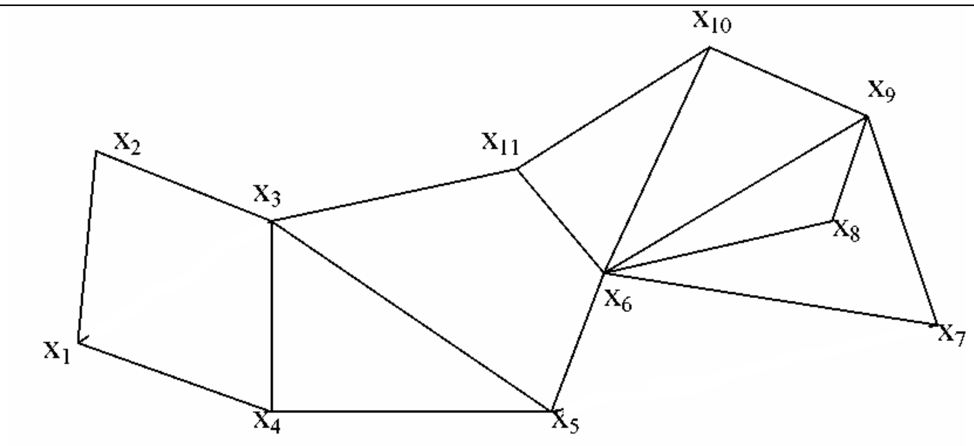
4</td></tr>
</table>

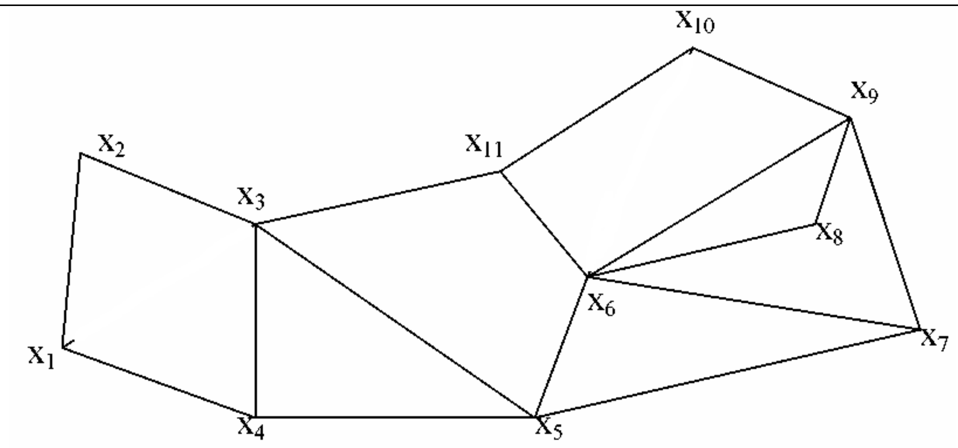
2. Построить матрицу смежности и минимальное остовное дерево для графа



1


x_{10}
x_9
x_{11}
x_2
x_3
x_8
x_6
x_1
x_7
x_4
x_5
2


x_{10}
x_9
x_2
x_{11}
x_3
x_8
x_6
x_1
x_7
x_4
x_5
3


x_{10}
x_9
x_2
x_{11}
x_3
x_8
x_6
x_1
x_7
x_4
x_5
4

Практическое занятие № 2

Тема: Решение задач по теории конечных автоматов

Цели:

1.Закрепить теоретические знания о конечных автоматах.

2. Научиться составлять кодировочную таблица переходов и выходов простейшего конечного автомата.

Оборудование и принадлежности: индивидуальное задание, листы формата А 4.

Структурную схему автомата можно представить в виде трех частей: блока запоминающих элементов и двух комбинационных схем КС1 и КС2. Поясним назначение каждой части схемы.Память состояний автомата состоит из k запоминающих элементов (ЗЭ), каждый из которых под действием синхронизирующего сигнала C может устанавливаться в состояние 0 или 1. Состояние запоминающих элементов определяет текущее состояние автомата. Комбинационная схема КС1 формирует очередное состояние автомата, которое определяется как функция текущего состояния и входного воздействия. Это состояние будет записано в запоминающие элементы автомата при поступлении синхросигнала.

Выходные сигналы Y автомата определяются комбинационной схемой КС2 как функция входных сигналов X и текущего состояния автомата S.

Для цифровых автоматов небольшой размерности, как показывает инженерная практика, часто наиболее удобен непосредственный переход от описательного задания способов функционирования автомата к заданию автомата кодированными таблицами переходов и выходов. Для обеспечения стабильной и безотказной работы используется установка автомата в начальное состояние.

Задача структурного синтеза синхронного автомата, рассматриваемая в данной работе, заключается в кодировании состояний, задании автомата кодированными таблицами переходов и выходов и синтезе комбинационных схем, формирующих сигналы возбуждения заданного типа запоминающих элементов и выходные сигналы.

Пример

Постановка задачи. Спроектировать синхронный конечный автомат Мили с одним входом X и одним выходом Y. При $X = 0$ автомат последовательно принимает состояния 0,1,2,4,5,0,1,…; при $X = 1$ принимает состояния 0,1,5,6,4,7,0,1,… (последовательности циклические). Автомат на выходе Y формирует сигнал 1 при $X = 0$ в состоянии 5; при $X = 1$ Y формирует сигнал 1 в состоянии 4. В остальных состояниях автомата $Y = 0$.

В качестве элемента памяти использовать D-триггер. Автомат должен иметь вход установки в начальное состояние.

Составление кодированной таблицы переходов и выходов

Вначале необходимо определить, сколько потребуется двоичных переменных для представления состояний в таблице переходов. Из анализа исходных данных (условия задачи) следует, что автомат может принимать семь различных состояний: 0,1,2,4,5,6,7. Таким образом, минимальное число двоичных разрядов, необходимое для кодирования этого количества состояний, равно трем.

Далее необходимо присвоить конкретному состоянию двоичную комбинацию, которую назовем *кодом состояния* автомата. В нашем случае естественно сопоставить каждому номеру состояния его двоичный номер, $0 = 000_2$, $1 = 001_2$, $4 = 100_2$ и т.д. Обозначим двоичные разряды кода состояния через $Q2$, $Q1$, $Q0$.

В кодированной таблице переходов для каждой комбинации кода состояния и входного воздействия указывается код следующего состояния.

Для того, чтобы получить кодированную таблицу переходов автомата необходимо в одном столбце записать значение входа X и соответствующие двоичные коды состояний автомата $Q2$, $Q1$, $Q0$. Эти состояния отнесем к моменту времени t и будем называть *текущим состоянием* автомата. Текущие состояния автомата записаны в колонках 1-4 табл. 2.1.

Затем в следующем столбце напротив каждого двоичного набора предыдущего столбца запишем новое состояние автомата, в которое он перейдет после поступления синхронизирующего сигнала. Например, если текущее состояние автомата при $X = 0$ равно $Q2,Q1,Q0 = 100$, то новое состояние автомата, в которое он должен перейти в соответствии с исходными условиями задачи, будет равно 101. Данные состояния отнесем к моменту времени $t+1$ и будем называть *следующим (будущим) состоянием* автомата. Следующие состояния автомата записаны в колонках 5-7 табл. 1. В восьмой колонке задано состояние выхода Y автомата в текущий момент времени t.

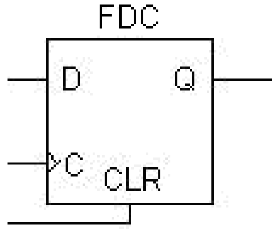
Таблица 1

Кодированная таблица переходов и выходов

Время t				Время t+1			Время t
X	*Q2*	*Q1*	*Q0*	*Q2*	*Q1*	*Q0*	*Y*
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

Следующий шаг заключается в составлении *таблицы возбуждения,* т.е. определения закона функционирования комбинационной схемы КС1 (см. рис. 1). В этой таблице для каждой комбинации кода состояния и входного воздействия указываются значения сигналов, которые необходимо подать на входы триггеров, чтобы заставить автомат перейти в желаемое следующее состояние с соответствующим кодом. Структура и содержание этой таблицы зависят от типа используемых триггеров (D-, JK-, T-триггеры и т.д.).

В нашем случае тип триггера задан в условии задачи – это D-триггер. В библиотеке базовых элементов ПЛИС XC10PC84 синхронный D-триггер с асинхронной установкой в 0 имеет имя FDC. Условное графическое обозначения D-триггера FDC и его таблица переходов приведены на рис. 2.2.



Входы		Выход	
CLR	D	C	Q
1		0	
0	1	0/1	1
0	0	0/1	0

Рис. 2. Условное графическое обозначение D-триггера FDC и его таблица переходов

В этом обозначении: *C* прямой синхронизирующий вход, *CLR* (*Clear*) – асинхронный вход установки триггера в 0, *D* – логический вход данных. В таблице переходов D-триггера: – произвольное значение, 0/1 – изменение синхросигнала из 0 в 1.

С помощью кодированной таблицы переходов можно определить для всех трех D-триггеров способ формирования входных сигналов *D*2, *D*1 и *D*0. Для формирования каждого из входных сигналов *D*2, *D*1 и *D*0 (выходов комбинационной схемы КС1) используются входной сигнал *X* в момент времени *t* и выходные сигналы, определяемые состояниями триггеров в тот же момент времени *t* (см. рис. 2)

Зависимость входного сигнала *Di*(*t*) триггера от состояний всех D-триггеров в момент времени *t* и от значения входного сигнала автомата *x*(*t*) называют *Функцией возбуждения* D-триггера. Таким образом, в таблице возбуждения следует указать значение сигнала, который необходимо подать на D-вход каждого триггера при всех возможных комбинациях вход/код состояния. В нашем примере кодированная таблица переходов, дополненная функциями возбуждения, имеет вид, указанный в табл. 2.

Таблица 2

Таблица переходов и функций возбуждения D-триггеров автомата

Номер набора	Время *t*				Время *t*+1			Время *t*		
	X	*Q2*	*Q1*	*Q0*	*Q2*	*Q1*	*Q0*	*D2*	*D1*	*D0*
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1

13	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0
14	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
12	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Для D-триггера $Q(t+1) = D(t)$ (времена t и $t+1$ означают время до и после поступления синхросигнала), таблица возбуждения тождественна кодированной таблице переходов автомата, за исключением того, как обозначается то, что вносится в эту таблицу (см. колонки 5-7 и 8-10 в табл. 2). Таким образом, при использовании D-триггеров фактически не нужно составлять отдельную таблицу возбуждения, достаточно назвать кодированную таблицу переходов таблицей «переход/возбуждение».

Задания по вариантам для практической работы приведены в табл. 3.

Таблица 3

Задание

Вариант	Состояния автомата при $X = 0$	Состояния автомата при $X = 1$	Y принимает значение 1 в состоянии автомата*	
			при $X = 0$	при $X = 1$
1	0;1;2;3;4;5;6;.7;11;...	0;2;4;6;8;1;3;5;7; 9;...	4;5	2;3
2	0;1;2;3;5;6;7;8;10..	0;1;2;4;6;8;3;5;7;12;..	1;2;3	8
3	12;1;2;4;5;6;8;11;...	0;1;2;3;4;6;8;5;7; 9;..	4	3;6;9
4	0;1;2;3;5;7;13;6;15;...	1;2;4;6;8;3;5;7; 9;10;..	5;7	4;6;8
5	0;1;2;3;4;5;6;8;13;...	0;2;4;6;8;1;3;5;7; 9;...	2;5	3;9
6	0;1;3;4;5;6;8;11;14;..	2;3;4;5;6;8;1;7; 11;..	4;7	3;6
7	0;1;2;3;5;6;11;7;...	0;2;6;8;3;5;7; 9;12;...	1;2	3;5
8	0;12;1;2;3;5;6;11;...	0;1;2;4;6;7;9;3;5;10;..	6;11	3;5
9	0;15;1;2;3;5;6;13;...	3;1;2;4;6;8;5;7; 9;11;..	13;15	8;11
10	0;17;1;2;3;5;6;11;...	1;3;4;6;8;5;7; 9;12;..	17	5;7;9
11	0;1;2;3;5;6;8;9;14;...	5;3;1;12;8;6;7; 9;10;..	6;8;9	10
12	0;1;2;3;5;6;7;9;12;...	11;12;4;6;8;3;5;7; 9;10;..	0;7	4;7
13	0;1;2;3;5;6;7;8;11;...	0;1;2;4;6;8;3;5;7; 9;10;..	1;5	2;4
14	0;1;5;7;2;3;5;6;14;...	1;2;4;6;0;3;5;7; 11;9;10;..	2;14	9;11
15	0;1;2;3;5;6;11;13;...	0;2;11;6;12;3;5;7; 9;10;..	2;6;13	3;5
16	0;4;6;1;2;3;5; 16;...	3;2;4;9;8;0;5;7; 6;10;..	1;4;6	7;10
17	0;1;2;3;5;6;7;8;11;...	0;1;2;7;6;8;3;5;4; 9;10;..	2;8	7;8;9
18	0;1;2;3;5;6;8;9;15;...	11;1;2;4;6;0;3;5;7; 9;10;..	1;3;5	7;9
19	0;1;2;3;5;6;11;17...	12;3;4;6;8;0;5;7; 9;10;..	0;11	0;3;4
20	0;1;2;3;5;6;11;13;15...	15;2;4;6;8;13;5;7; 9;10;..	1;5;6	10;15
21	0;1;2;3;5;6;11;12;14...	14;1;2;3;4;6;8;5;7; 9;10;..	2;3	2;10
22	0;1;2;3;5;6;11;13;15...	15;0;1;2;4;6;3;5;7; 9;10;..	1;6;15	4;10

*При остальных соотношениях X - "Состояние автомата" Y принимает значение 0

Практическое занятие №3

Тема: Решение задач по комбинаторике и теории вероятностей.

Цели работы

1. Закрепление теоретических знаний об основных методах теории вероятностей и математической статистики.
2. Получение практических навыков построения ряда распределения случайной величины.
3. Получение практических навыков вычисления основных статистических характеристик случайной величины.

Оборудование и принадлежности: калькулятор, индивидуальное задание, листы формата А 4.

Ход выполнения работы

Теоремы о сложении и умножении вероятностей. *Теорема* 1. *Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий:P(A+B) = P(A) + P(B). (3.1).*

Пример 1. На складе имеется 50 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 25 изготовлено первой бригадой, 15 — второй и 10 — третьей. Найти вероятность того, что на сборку поступила деталь, изготовленная второй или третьей бригадой.

Решение. Так как поступление детали, изготовленной одной бригадой, исключает появление детали, изготовленной другой бригадой, то события несовместны. Вероятность поступления детали из бригад обозначим соответственно P(A), P(B), P(C). Имеем:

$P(A)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$; $P(C)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$. $P(B+C)=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$.

Заметим, что если А и В — совместные события, то формула (3.1) неприменима. Рассмотрим этот случай подробно. Пусть события А и В являются совместными, т. е. появление одного из них не исключает появления другого.

Формула полной вероятности. Пусть требуется определить вероятность некоторого события *A,* которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий. Эти события называют *гипотезами.*При таких условиях вероятность появления события А определяется по формуле:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + \cdots + P(H_n)\cdot P(A|H_n).$$

Пример. На предприятии изготавливают изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 30 % изделий от общего объема их производства, на второй — 25 %, на третьей - остальная часть продукции. Каждая из линий выдает годных изделий: 97 %, 98 %, 96 %. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие - бракованное.

Решение. Обозначим *A* - наугад взятое изделие бракованное; H_1, H_2, H_3- гипотезы производства изделия соответственно на первой, второй и третьей линиях.

$$P(H_1) = 0{,}30,\ P(H_2) = 0{,}25,\ P(H_3) = 0{,}45;$$
$$P(A|H_1) = 0{,}03,\ P(A|H_2) = 0{,}02,\ P(A|H_3) = 0{,}04.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3) =$$
$$= 0{,}30\cdot 0{,}03 + 0{,}25\cdot 0{,}02 + 0{,}45\cdot 0{,}04 = 0{,}032.$$

Независимые испытания. Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент называют ***схемой повторных испытаний*** или ***схемой Бернулли***. При такой схеме в результате испытания возможны ***два исхода***: появится событие A, либо противоположное ему событие $\overline{A}$. Проведем n испытаний Бернулли. Обозначим вероятность появления события A в единичном испытании буквой p, т.е. $p = P(A)$, а вероятность противоположного события (событие A не наступило) - буквой $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.Тогда вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях ровно k раз, выражается ***формулой Бернулли***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, где q = 1 - p$$

Пример. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. **Решение.** $p = \frac{1}{2}; \quad q = \frac{1}{2}$. Найдем вероятности того, что в семье родилась одна или две девочки: $p_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5}{32}; \quad p_5(2) = C_5^2 p^2 q3 = \frac{10}{32};$

Закон распределения дискретной случайной величины. *Случайной величиной* называется переменная величина, которая в зависимости от исходов испытания принимает то или иное значение (зависящее от случая).

Определение.*Законом распределения дискретной случайной величины* называется соответствие между значениями x_1, x_2, x_3, ... этой величины и их вероятностями p_1, p_2, p_3, ...Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически (т. е. с помощью формул). Пример. Подбрасываются два кубика, подсчитывается число очков, выпавших на них. Найти закон распределения дискретной случайной величины X - суммы очков на двух кубиках

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X с законом распределения $p_i(x_i)$ называется число $x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$..

Определение. Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D[X] = M[(X - M[X])^2]$.

Пример. Дискретная случайная величина Xимеет закон распределения

X	0	1	2
p	0,3	0,5	0,2

Найти ее дисперсию и среднее квадратичное отклонение. *Решение.* По формуле находим$M[X]$ = 0 • 0,3 + 1 • 0,5 + 2 • 0,2 = 0,9

$(X-\backslash X\backslash)^2$	$(0-0{,}9)^2$	$(1-0{,}9)^2$	$(2-0{,}9)^2$
p	0,3	0,5	0,2

Дисперсию находим по формуле:

$D[X] = (0 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (1 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}5 + (2 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}49.$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$

На практике дисперсию случайной величины находят по формуле:

$D[x] = M[X^2] - M^2[X]$

Задание

<table>
<tr><td colspan="3">Вариант 1</td></tr>
<tr><td>2.1.1</td><td>На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 30 %, вторая -25%, третья - 45 % всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2 %, 1 %, 3 %. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным</td><td></td></tr>
<tr><td>2.1.2.</td><td>Произведено 8 независимых испытаний. Какова вероятность того, что будет 5 успешных испытаний, если известно, что вероятность успешного испытания равна 0,20.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.1.3</td><td>Построить закон распределения случайной величины - количества попаданий баскетболиста в кольцо при шести выполненных бросках, если вероятность попадания в одном испытании равна 0,7. Найти дисперсию этой случайной величины</td><td></td></tr>
<tr><td>2.1.4</td><td>Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td><td>500</td><td>600</td><td>700</td></tr>
<tr><td>$P(X)$</td><td>0,5</td><td>0,8</td><td>0,12</td><td>0,25</td><td>0,30</td><td>0,20</td></tr>
</table>
Найти ее математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Вариант 2</td></tr>
<tr><td>2.2.1</td><td>Узел содержит две независимо работающие детали. Вероятности отказа деталей соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа узла, если для этого достаточно, чтобы отказала хотя бы одна деталь.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.2.2</td><td>Монету бросают 4 раза. Определить вероятность того, что герб появится:
а) Ровно два раза;
б) Не менее двух раз;
в) Не более двух раз</td><td></td></tr>
<tr><td>2.2.3</td><td>Построить закон распределения случайной величины - количества выпавших орлов при одновременном бросании пяти монет. Найти дисперсию этой случайной величины.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.2.4</td><td>Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>-40</td><td>-30</td><td>-20</td><td>-10</td><td>0</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$P(X)$</td><td>0,15</td><td>0,25</td><td>0,30</td><td>0,15</td><td>0,10</td><td>0,5</td></tr>
</table>
Найти ее математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Вариант3</td></tr>
<tr><td>2.3.1</td><td>Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго 0,6. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3.2</td><td>Узел автомашины состоит из четырех деталей. Вероятности выхода этих деталей из строя соответственно равны: 0.04; 0.07; 0.05; 0.02. Узел выходит из строя, если выходит из строя хотя бы одна деталь. Найти вероятность того, что узел не выйдет из строя, если детали выходят из строя независимо друг от друга.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3.3</td><td>Произвели 7 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,70. Построить закон распределения случайной величины - количества попаданий. Найти дисперсию этой случайной величины</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3.4</td><td>Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>45</td><td>50</td><td>55</td><td>60</td><td>65</td><td>70</td></tr>
<tr><td>$P(X)$</td><td>0,10</td><td>0,20</td><td>0,35</td><td>0,20</td><td>0,10</td><td>0,05</td></tr>
</table>
Найти ее математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Вариант 4.</td></tr>
<tr><td>2.4.1</td><td>Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими бригадами соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одной бригадой.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4.2</td><td>Проверяются изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,9. Найти вероятность того, что из семи проверенных изделий только четыре стандартных.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4.3</td><td>Проверка качества выпускаемых деталей показала, что в среднем брак составляет 10 %. Постройте закон распределения случайной величины - количества годных деталей в партии из 8 штук, отобранных наудачу. найдите дисперсию этой случайной величины.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4.4</td><td>Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>45</td><td>50</td><td>55</td><td>60</td><td>65</td><td>70</td></tr>
<tr><td>$P(X)$</td><td>0,10</td><td>0,20</td><td>0,35</td><td>0,20</td><td>0,10</td><td>0,05</td></tr>
</table>
Найти ее математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$</td><td></td></tr>
</table>

Практическое занятие №4

Тема: Решение задач по теории очередей и массового обслуживания, сетевого планирования и оптимизации

Цели: Научится рассчитывать параметры систем массового обслуживания (вероятности числа занятых каналов; вероятности отказа в обслуживании заявки; относительной пропускной способности; абсолютной пропускной способности).

Порядок выполнения работы

Системы массового обслуживания (СМО)— это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания. На практике обычно применяются многоканальные СМО, когда число каналов обслуживания n >1. Многоканальные системы могут состоять из обслуживающих устройств как одинаковой, так и разной производительности. По времени пребывания клиентов в очереди до начала их обслуживания, системы делятся на три группы:

1) **с ожиданием**, 2) **с отказами**, 3) **смешанного типа.**

Системы с ожиданием

В **СМО с ожиданием** клиент, застав все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания до тех пор, пока один из каналов не освободится. Процесс массового обслуживания рассматриваемой СМО характеризуется следующим: входной и выходной потоки имеют интенсивности λ и μ соответственно, система имеет C каналов обслуживания. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента равна $1/\mu$. Вероятности того, что в системе находятся n заявок (C обслуживаются, остальные ожидают в очереди), равна:

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot P_0, & 0 \le n \le C \\ P_n = \dfrac{\rho^n}{C!C^{n-C}} \cdot P_0, & n > C \end{cases}, \textit{где}\, P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C! \cdot \left[1 - \dfrac{\rho}{C}\right]} \right]^{-1}$$

Условия функционирования данной СМО: $\left[\dfrac{\lambda}{\mu \cdot C}\right] < 1$

Остальные характеристики многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью:

среднее число клиентов в очереди на обслуживание $L_q = \left[\dfrac{C \cdot \rho}{(C-\rho)^2}\right] \cdot \rho^C$;

среднее число находящихся в системе клиентов (заявок на обслуживание и в очереди) $L_S = L_q + \rho$;

средняя продолжительность пребывания клиента (заявки на обслуживание) в очереди $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$;

продолжительность пребывания клиента в системе $W_S = W_q + \frac{1}{\mu}$.

Пример. Механическая мастерская завода с тремя постами (каналами) выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, - пуассоновский и имеет интенсивность $\lambda = 2{,}5\ мех.\ в\ сут.$, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательному закону и равно $t_{об} = 0{,}5\ сут.$. Очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно.

Вычислить следующие характеристики системы:

1) вероятность состояний системы;
2) среднее число заявок в очереди на обслуживание;
3) среднее число находящихся в системе заявок;
4) среднее время пребывания заявки в очереди;
5) среднее время пребывания заявки в системе.

Решение.

Параметр потока обслуживаний $\mu = \frac{1}{t_{об.}} = \frac{1}{0{,}5} = 2$.

Приведенная интенсивность потока заявок $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2{,}5}{2{,}0} = 1{,}25$, при этом $\frac{\lambda}{\mu \cdot C} = \frac{2{,}5}{2{,}0 \cdot 3} = 0{,}41 < 1$. Поскольку $\frac{\lambda}{\mu \cdot C} < 1$, то очередь не растет безгранично и в системе наступает предельный стационарный режим работы.

Вычислим вероятности состояний системы:

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!\left[1 - \frac{\rho}{C}\right]} \right)^{-1} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!\left(1 - \frac{\rho}{3}\right)}\right]} = \frac{1}{\left[1 + 1{,}25 + \frac{1{,}25^2}{2} + \frac{1{,}25^3}{6\left(1 - \frac{1{,}25}{3}\right)}\right]} = 0{,}279$$

$$P_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot P_0 = 1{,}25 \cdot 0{,}279 = 0{,}349; \qquad P_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^2}{2!} \cdot 0{,}279 = 0{,}218$$

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^3}{3!} \cdot 0{,}279 = 0{,}091; \qquad P_4 = \frac{\rho^4}{4!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^4}{4!} \cdot 0{,}279 = 0{,}028.$$

Вероятность отсутствия очереди у мастерской

$$P_{отк} \approx P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \approx 0{,}279 + 0{,}394 + 0{,}218 + 0{,}091 = 0{,}937$$

Среднее число заявок в очереди на обслуживание

$$L_q = \left[\frac{C \cdot \rho}{(C-\rho)^2} \right] \cdot P_C = \left[\frac{3 \cdot 1{,}25}{(3-1{,}25)^2} \right] \cdot 0{,}091 = 0{,}111$$

Среднее число находящихся в системе заявок

$$L_S = L_q + \rho = 0{,}111 + 1{,}25 = 1{,}361$$

Средняя продолжительность пребывания механизма в очереди на обслуживание $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{0{,}111}{2{,}5} = 0{,}044$ **суток.**

Средняя продолжительность пребывания механизма в мастерской (в системе) $W_S = W_q + \dfrac{1}{\mu} = 0{,}044 + \dfrac{1}{2} = 0{,}544$ **суток.**

Системы с отказами

В системах с отказами поступивший клиент, застав все каналы занятыми, покидает систему. Пример данной системы: Мужчина приехал в автомастерскую сдать автомобиль на ремонт, а ему говорят, сегодня мы не сможем починить вашу машину так как все заняты => отказ и он покидает систему.

Массовое обслуживание в данной системе, характеризуется интенсивностью входного потока λ, при этом параллельно может обслуживаться не более *n* клиентов (заявок). Средняя продолжительность обслуживания одной заявки это отношение 1/μ, т.е. это отношение единицы и параметра μ- потока обслуживаний. Режим функционирования одного канала не влияет на режим функционирования других каналов системы, длительность обслуживания клиентов каждым из каналов - случайная величина, подчиненная экспоненциальному закону распределения.

Стационарное решение системы имеет вид:

$$P_k = \frac{\rho^k / k!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_{0,\, k=0,1,\ldots,n}, \text{ где } P_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!},\, k = 0,1,,,n; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

Где P_k - вероятность того, что к-ый клиент будет обслужен

Формулы для вычисления вероятностей называются *формулами Эрланга.*

Вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме: *вероятность отказа:*

$$P_{отк} = P_k = \frac{\rho^k}{n!} \cdot P_0$$

так как заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все каналов заняты.

Величина вероятности отказа $\left(P_{отк}\right)$ характеризует полноту обслуживания входящего потока;

вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (она же - относительная пропускная способность системы) дополняет $P_{отк}$ до единицы:

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^k}{n!} \cdot P_0;$$

абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot q = \lambda(1 - P_{отк})$*;*

среднее число каналов, занятых обслуживанием $\left(\bar{k}\right)$: $\bar{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \rho\left(1 - P_{отк}\right)$

Величина $\bar{k}$ характеризует степень загрузки СМО.

Пример. Пусть *n*-канальная СМО представляет собой ВЦ с тремя (*n*=3) взаимозаменяемыми ЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ=1 задач в час. Средняя продолжительность обслуживания $t_{об}$=1,8 час.

Требуется вычислить значения:

- вероятности числа занятых каналов ВЦ;
- вероятности отказа в обслуживании заявки;
- относительной пропускной способности ВЦ;
- абсолютной пропускной способности ВЦ;
- среднего числа занятых ЭВМ на ВЦ.

Решение. Параметр μ потока обслуживаний: $\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555;$

Приведенная интенсивность потока заявок $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0{,}555} = 1{,}8$

Предельные вероятности состояний найдем по формулам Эрланга:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!}_{\,0}} = \frac{1}{1 + 1{,}8 + 1{,}62 + 0{,}97} = 0{,}186;$$

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = 0{,}97 \cdot 0{,}186 = 0{,}180$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot P_0 = 1{,}8 \cdot 0{,}186 = 0{,}334; \quad P_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot P_0 = 1{,}62 \cdot 0{,}186 = 0{,}301;$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки $P_{отк} = p_3 = 0{,}180$.

Относительная пропускная способность ВЦ $q = 1 - p_{отк}$.

Абсолютная пропускная способность ВЦ: $A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0{,}820 = 0{,}820$.

Среднее число занятых каналов – ЭВМ $\bar{k} = \rho(1 - P_{отк}) = 1{,}8(1 - 0{,}180) = 0{,}147$.

Таким образом, в СМО в среднем будет занято 1,5 компьютера из трех. Центр не обслуживает заявки в среднем в 18% случаев $(P_3 = 0{,}180)$.

Практические задания

Вариант 1. В расчетном узле магазина самообслуживания работают 3 кассы. интенсивность входного потока составляет 5 покупателей в минуту. интенсивность обслуживания каждого контролера-кассира составляет 2 покупателя минуту. Определите вероятностные характеристики расчетного узла как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант 2. В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью λ = 1,5 заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Определите вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант 3. В мастерской по ремонту холодильников работает 5 мастеров. В среднем в течение дня поступает в ремонт 10 холодильников. Поток заявок пуассоновский. Время ремонта подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей, в среднем в течение дня при семичасовом рабочем дне каждый из мастеров ремонтирует 2 холодильника. Определите вероятностные характеристики мастерской как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант 4. В мастерской по ремонту холодильников работает 4 мастера. В среднем в течение дня поступает в ремонт 6 холодильников. Поток заявок пуассоновский. Время ремонта подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей, в среднем в течение дня при семичасовом рабочем дне каждый из мастеров ремонтирует 2 холодильника.

Вариант 5. В мини-маркет поступает поток покупателей с интенсивностью 6 покупателей в 1 мин., которых обслуживают три контролера-кассира с интенсивностью 2 покупателя в 1 мин. длина очереди ограничена 5 покупателями. Определите вероятностные характеристики мини-маркета как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант 6. На плодоовощную базу в среднем через 30 мин. прибывают автомашины с плодоовощной продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляют 1.5 ч. Разгрузку производят две бригады. На территории базы у дебаркадера могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Определите вероятностные характеристики базы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант 7. На автомойку в среднем за час приезжают 9 автомобилей, но если в очереди уже находятся 4 автомобиля, вновь подъезжающие клиенты, как правило, не встают в очередь, а проезжают мимо. Среднее время мойки автомобиля составляет 20 мин., а мест для мойки всего два. Средняя стоимость мойки автомобиля составляет 70 руб. Определите вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме среднюю величину потери выручки автомойки в течение дня.

Вариант 8. Магазин получает овощи из теплиц. Автомобили с грузом прибывают с интенсивностью $\boldsymbol{\lambda}$ машин в день. Подсобные помещения позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный **m** автомобилями. В магазине работают **n** фасовщиков, каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течении $\mathbf{t_{обсл.}}$ часов. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 часов. Определите вероятностные характеристики магазина как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Определите емкость подсобных помещений при заданной вероятности Р обсл. полной обработки товаров.

Вариант 9. Заявки на телефонную станцию поступают с интенсивностью 90 заявок в час, средняя продолжительность разговора 2 минуты. Определите вероятностные характеристики телефонной станции как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Определить оптимальное число обслуживаемых телефонных номеров из поступивших, если в качестве показателя эффективности принять относительную пропускную способность системы, высчитываемую по формуле $\mathbf{Q=\mu/ (\lambda+\mu)}$

Вариант 10. Имеется автозаправочная станция с 2-мя колонками. В очереди не может быть больше 3-х машин. Интенсивность и среднее время заправки равны 2.1 и 0.55. Найти вероятность простоя системы. Определите вероятностные характеристики автозаправочной станции как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант 11. Пункт по ремонту квартир работает в режиме отказа и состоит из двух бригад. Интенсивность потока заявок λ, производительность пункта μ. Определить вероятность того, что оба каналы свободны, один канал занят, оба канала заняты, вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускные способности, средне число занятых бригад.

Вариант 12. В вычислительный центр коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 ч. Интенсивность потока заявок 0,25 (1/ч). Определить параметры СМО.

Вариант 13. В мастерской по ремонту холодильников работает 5 мастеров. В среднем в течение дня поступает в ремонт 6 холодильников. В среднем в течение дня каждый из мастеров ремонтирует 3 холодильника. Требуется определить**:** 1) вероятность того, что все мастера свободны от ремонта холодильников, 2) вероятность того, что все мастера заняты ремонтом, 3) среднее время ремонта одного холодильника, 4) число мастеров, свободных от работы.

Вариант 14. Интенсивность потока телефонных звонков в агентство по продаже железнодорожных билетов, имеющих один телефон, составляет 16 вызовов в час. Продолжительность оформления заказа на билет равна 2,4 минуты. Определить относительную и абсолютную пропускную способность системы и вероятность отказа. Сколько телефонов должно быть в агентстве, чтобы относительная пропускная способность была не менее о,75

Вариант 15. (Задача с использованием СМО с неограниченным ожиданием.) Сберкасса имееттрех контролеров-кассиров (n=3) дня обслуживания вкладчиков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью $\lambda = 30 чел/ч$. Средняя продолжительность контролером-кассиром одного вкладчика $t_{обс} = 3мин$. Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

Вариант 16. Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в ратное время с интенсивностью $\lambda = 6$ машин в лень. В магазине работают три фасовщика (n=3),каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $t_{обс} = 4ч$. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 7 час. Определить параметры СМО, а также, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была $P_{полн.обр} > 0,97$.

Вариант 17. Имеется автозаправочная станция с 4-мя колонками. В очереди не может быть больше 3-х машин. Интенсивность и среднее время заправки равны 3.1 и 0.8. Найти вероятность простоя системы. Определите вероятностные характеристики автозаправочной станции как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант 18. Сберкасса имеет пять контролеров-кассиров (n=6) дня обслуживания вкладчиков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью $\lambda = 60 чел/ч$. Средняя продолжительность контролером-кассиром одного вкладчика $t_{обс} = 5мин$. Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

Вариант 19. В мастерской по ремонту холодильников работает 4 мастеров. В среднем в течение дня поступает в ремонт 7 холодильников. В среднем в течение дня каждый из мастеров ремонтирует 4 холодильника. Требуется определить**:** 1) вероятность того, что все мастера свободны от ремонта холодильников, 2) вероятность того, что все мастера заняты ремонтом, 3) среднее время ремонта одного холодильника, 4) число мастеров, свободных от работы.