ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Петрозаводский филиал ПГУПС

ОДОБРЕНО	УТВЕРЖДАЮ
на заседании цикловой комиссии ЕН	Начальник УМО
протокол № 8 от 28 апреля 2017 г.	
Председатель цикловой комиссии:	____________ А.В. Калько
Михайлова Т.А (________)	«28» 04 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению практических занятий

По учебной дисциплине: ЕН.01. Математика

Специальность: 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)

Разработчик: Писаренко А.С.

2017 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации и проведению практических занятий разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01. Математика и предназначено для выполнения практических занятий обучающимися.

Практические занятия по учебной дисциплине направлены на усвоение знаний, освоение умений и формирование элементов общих и профессиональных компетенций, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;

применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;

использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;

знать:

основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств;

решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел.

В результате освоения учебной дисциплины происходит поэтапное формирование элементов общих и профессиональных компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.3. Оформлять документы, регламентирующие организацию перевозочного процесса.

ПК 2.1.Организовывать работу персонала по планированию и организации перевозочного процесса.

ПК 3.1. Организовывать работу персонала по обработке перевозочных документов и осуществлению расчетов за услуги, предоставляемые транспортными организациями.

Рабочей программой предусмотрено выполнение обучающимися практических занятий, включая, как обязательный компонент практические задания с использованием персонального компьютера.

Распределение результатов освоения учебного материала в ходе выполнения заданий на практических занятиях происходит в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Распределение результатов освоения учебного материала

Раздел, тема	**Контрольно-оценочные мероприятия**	**Результаты**		**Поэтапно формируемые элементы общих и профессиональных компетенций**
		усвоенные знания	**освоенные умения**	
Раздел 1. Математический анализ				
Тема 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление	**Практические занятия №1-7** Вычисление пределов Вычисление производной сложных функций Выполнение задач на исследование функций. Решение задач на приложения производной Вычисление простейших определенных интегралов Вычисление определённых интегралов методом подстановки Решение задач на приложения определённого интеграла	Основные понятия и методы интегрального и дифференциального исчисления	- умение выполнять действия с интегралами и производными при решении профессиональных задач.	ОК 2. ОК 3. ПК 1.3.

Тема 1.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения	**Практическое занятие №8-11** Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными Решение неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение неполных дифференциальных уравнений второго порядка. Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.	Дифференциальные уравнения первого и второго порядка; - дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. - однородные уравнения первого порядка; - линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	- умение решать обыкновенные дифференциальные уравнения и использовать их при решении профессиональных задач.	ОК 2. ОК 6. ОК 7. ОК 8.
Тема 1.3. Ряды	**Практические занятия №12** Определение сходимости числовых рядов. Решение прикладных задач на применение признака сходимости Даламбера	- числовые ряды, признаки сходимости числового ряда по Даламберу, Коши, сравнения, интегральный признак; - разложение подынтегральной функции в ряд; - степенные ряды Маклорена	- умение применять числовые ряды при решении профессиональных задач	ОК 2. ОК 4.
Раздел 2. Основы дискретной математики				
Тема 2.1. Основы теории множеств	**Практические занятия №13** Выполнение операций над множествами**.**	Основные понятия теории множеств	- умение применять основные понятия теории множеств при решении профессиональных задач	ОК 2. ОК 3.
Тема 2.2. Основы теории графов	**Практические занятия №14** Построение графа по условию ситуационных задач	Основные понятия теории графов	- умение применять основные понятия теории графов при решении профессиональных задач	ОК 1. ОК 9. ПК 1.3. ПК 2.1. ПК 3.1.
Раздел 3. Основы теории вероятности и математической статистики				
Тема 3.1. Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей Тема 3.2. Случайная величина, ее функция распределения Тема 3.3. Математическое ожида-	**Практические занятия №15-17** Решение комбинаторных задач. Решение задач на определение вероятности события. Решение задач на применение теорем о вероятности суммы и произведения событий **Практическое занятие №18** По заданному условию построить ряд распределения случайной величины **Практическое занятие №19** Нахождение математического ожидания и дисперсии дискретной случай-	Понятие комбинаторной задачи. Факториал числа. Виды соединений: размещения, перестановки, сочетания и их свойства. Случайный эксперимент, элементарные исходы, события. Определение вероятности: классическое, статистическое, геометрическое; условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Бернулли. Случайные величины, законы их распределения и числовые характеристики. Математическое	- умение применять комбинаторику при решении профессиональных задач. - умение применять методы теории вероятностей при решении профессиональных задач. - умение применять методы математической статистики при решении профессиональных задач.	ОК 4. ОК 5. ОК 6. ОК 7. ОК 8.

ние и дисперсия случайной величины	ной величины законом распределения.	ожидание и дисперсия.		
Раздел 4. Основные численные методы				
Тема 4.1. Численное интегрирование	**Практическое занятие №20** Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности.	- понятие о численном интегрировании; - формулы численного интегрирования: прямоугольника и трапеций, формула Симпсон;. - абсолютная погрешность при численном интегрировании.. .	- умение применять методы численного интегрирования для решении профессиональных задач	ОК 2. ОК 3. ОК 8.

Содержание практических занятий охватывает весь круг умений и компетенций, на формирование которых направлена учебная дисциплина.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1

Вычисление пределов.

Практическое занятие №2

Вычисление производной сложной функции.

Практическое занятие №3

Выполнение задач на исследование функции.

Практическое занятие №4

Решение задач на приложения производной.

Практическое занятие №5

Вычисление простейших определённых интегралов.

Практическое занятие №6

Вычисление определённых интегралов методом подстановки.

Практическое занятие №7

Решение задач на приложения определённого интеграла.

Практическое занятие №8

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Практическое занятие №9

Решение неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка.

Практическое занятие №10

Решение неполных дифференциальных уравнений второго порядка.

Практическое занятие №11

Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Практическое занятие №12

Определение сходимости числовых рядов. Решение задач на применение признака сходимости Даламбера.

Практическое занятие №13

Выполнение операций над множествами.

Практическое занятие №14

Построение графа по условию ситуационной задачи.

Практическое занятие №15

Решение комбинаторных задач.

Практическое занятие №16

Решение задач на определение вероятности события.

Практическое занятие №17

Решение задач на применение теорем о вероятности суммы и произведения событий.

Практическое занятие №18

Построение ряда распределения случайной величины.

Практическое занятие №19

Нахождение математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

Практическое занятие №20

Вычесление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

При оценке освоенных умений при выполнении практических работ применяется пятибалльная шкала оценивания.

Оценивание практических занятий производится в соответствии со следующими нормативными актами:

- Положение о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;

- Положение о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий.

Практическое занятие № 1

Вычисление пределов

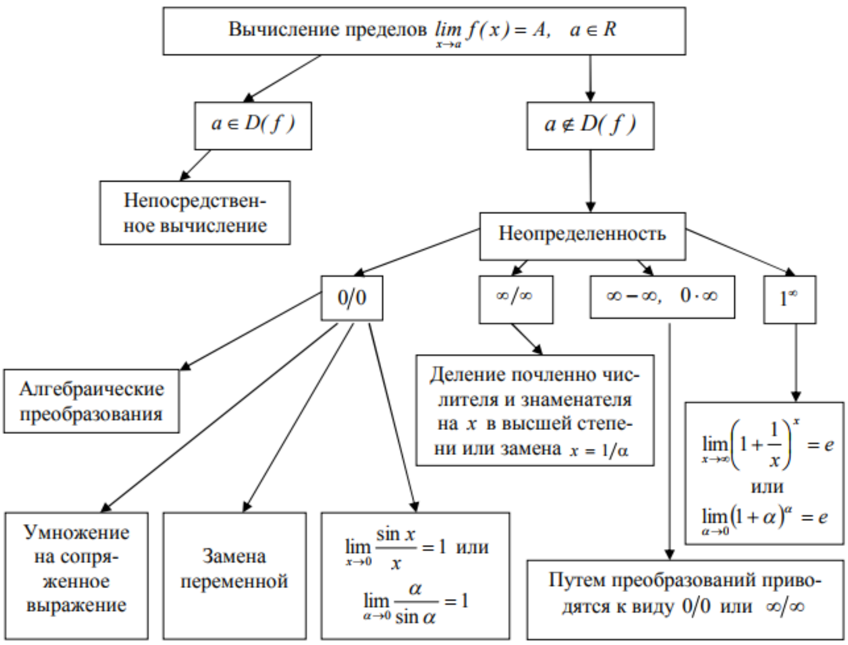
Цель:

- Научиться вычислять пределы
- Научиться раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Способы вычисления пределов



Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданной отношением двух многочленов, существует два способа:

1) каждый член числителя и знаменателя необходимо разделить на x в наивысшей степени;

2) применить метод замены переменной: $x = \frac{1}{\alpha}$ (при $x \to \infty$ $\alpha \to 0$).

Пример Найти $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

1 способ: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{4}{x}} = \frac{2}{3}$,так как при $x \to \infty$ каждая из дробей $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{4}{x}$ стремится к нулю.

а) Дробно-рациональные функции. В этом случае: в числителе и знаменателе выделяется множитель $(x-a)$ и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель;

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Применим способ группировки слагаемых в числителе и знаменателе дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

б) Дробно-иррациональные функции. Для избавления от неопределенности в этом случае существует два способа:

1) умножение числителя и знаменателя дроби на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

2) метод замены переменной.

В результате таких преобразований удается свести данный случай к уже рассмотренному в предыдущем пункте.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{c}x=t^6,\ \sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2,\\ x\to 1\Rightarrow t\to 1\end{array}\right\}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

в) Пределы от функций, в которых участвуют *тригонометрические выражения*, обычно сводятся к *первому замечательному пределу*.

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, называется *первым замечательным пределом*. Этот предел равен единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{, или }\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1 \qquad (3)$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

Применяя формулу для косинуса двойного угла: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\,.$$

Иногда с помощью тригонометрических преобразований неопределенность приводится к непосредственному вычислению предела.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{tgx}{\sin 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2\sin x\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\sin x}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\,.$$

Задания:

	1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$	**1, 4, 7, 10, 13**	**2, 5, 8, 11, 14**	**3, 6, 9, 12, 15**
неопределенности вида $\frac{0}{0}$	**1, 4, 7, 10, 13**	**2, 5, 8, 11, 14**	**3, 6, 9, 12, 15**

1.) неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+x}{4x^4+x^2+5}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{7x+\sqrt[3]{x}}$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3}{\sqrt{x^6+2x-3}}$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+x+5}{x^3-5}$.
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-x+7}{3x^2+1}$.
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}+8}{x^2+5x-6}$.
14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^5-x^2+1}{x^6+x^3+x}$.
15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-3x+4}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$.

2.) неопределенности вида $\frac{0}{0}$

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.
5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{2x^2-x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{x}$.
7. $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt{x-5}-3}{x^2-256}$.
8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.
9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.
10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$.
11. $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.
12. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$.
13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.
14. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$..
15. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$.

Практическое занятие № 2

Вычисление производной сложной функции

Цель: Закрепить умения вычислять производные

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ПРОИЗВОДНАЯ

Производные элементарных функций

1. $(C)'=0$	2. $(x)'=1$	3. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	4. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	5. $\left(e^x\right)'=e^x$
6 $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$	7. $\left(\ln x=\frac{1}{x}\right)$	8. $(\sin x)'=\cos x$	9. $(\cos x)'=-\sin x$	10. $tgx'=\frac{1}{\cos^2 x}$
11. $ctgx'=-\frac{1}{\cos^2 x}$	12. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	13/ $(arcctgx)'=\frac{-1}{1+x^2}$	14. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15. $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования:

1. $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x);\ \left(f(x)-g(x)\right)'=f'(x)-g'(x)$
2. $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $(kf(x))'=kf'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Производная сложной функции: $f(\varphi(x))'=f'(u)(\varphi'(x))$

Задание:

Вариант 1

1. Найти производную функции

$y=\left(x^4-2x^2-1\right)^7$; $y=\ln\left(4x^3+2x+5\right)$; $y=\cos(3x-2x^2)$

y= $\sqrt{9-x^2}$

Вариант 2

1. Найти производную функции

$y=e^{2x^3+4}$; $y=\sqrt{\left(2x^2-5\right)}$; $y=\sin\left(4-x^3\right)$

y= $\sqrt[3]{1+3x^2}$

Вариант 3

1. Найти производную функции

1) $y=\left(3-5x\right)^6$;2) $y=\cos 3x$;3) $y=\left(2x+1\right)^{10}$

y= $\log_3 \sin x$

Вариант 4

1. Найти производную функции

1) $y=\left(6x-1\right)^{-5}$;2) $f(x)=\left(3-\frac{x}{2}\right)^5$;3) $y=\sin(3x^2-4)$

y=$\cos^6\left(\ln\left|\frac{x^2}{1-3x}\right|\right)$

Вариант 5

1. Найти производную функции

$y=\left(x^4-2x^2-1\right)^7$; $y=\ln\left(4x^3+2x+5\right)$; $y=\sin(4x-3x^2)$

y=$tg^{\frac{2}{7}}(8x^2)$

Вариант 6

1. Найти производную функции

1) $f(x)=\left(x^3-2x^2+3\right)^{17}$;2) $f(x)=\cos^2 x$;3) $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$

y= $\sqrt{9-x^2}$

Практическое занятие № 3

Выполнение задач на исследование функций

Цель: Научиться исследовать функции с помощью производной

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Исследование функции

Рассмотрим последовательность выполнения операций при исследовании функции и построении ее графика на следующем примере.

Пример. Исследуйте функцию и постройте ее график $y = x\sqrt{x} - 6x$

Решение.

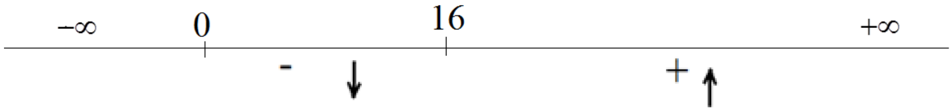
1) Область определения. $x \in [0, +\infty)$

2) Функция не периодическая.

3) Функция общего свойства, то есть не относится ни к четным, ни к нечетным, так как $y(-x) \neq y(x);\ y(-x) \neq -y(x).$.

3) Области возрастания-убывания.

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6; \quad \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6x = 0; \frac{9}{4}x = 36; 9x = 144; x = 16; x - 16 = 0$$



$x \in (0; 16)$ - функция убывает; $x \in (16; +\infty)$ - функция возрастает

4) Точки экстремумов: при переходе через $x = 16$ первая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно при $x = 16$ имеем минимум. Для определения значения этого минимума подставим $x = 16$ в уравнение кривой: $y(16) = 16\sqrt{16} - 6 \cdot 16 = 64 - 96 = -32.$ Таким образом, у графика функции имеется точка минимума с координатами (16; -32).

5) Точки пересечения с осями координат.

Для определения ординаты точки пересечения с осью Oy подставим в уравнение кривой $x = 0$. В результате получим: $y(0) = 0\sqrt{0} - 6 \cdot 0 = 0$.

Таким образом, график функции пересекает ось Oy при $y = 0$.

Для определения абсциссы точки пересечения с осью Ox подставим в уравнение кривой $y = 0$. В результате получим:

$$0 = x\sqrt{x} - 6x; \quad x(\sqrt{x} - 6) = 0; \quad x_1 = 0; \quad \sqrt{x} - 6 = 0; \quad x_2 = 36.$$

Таким образом, график функции пересекает ось Ox в двух точках: при $x = 0$ и $x = 36$.

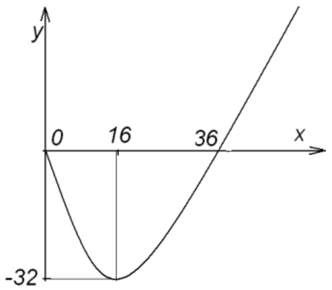
6) Области выпуклости-вогнутости.

Для определения участков вогнутости решаем неравенство: $y''=\frac{3}{4\sqrt{x}}>0$. Оно справедливо для любого x из области определения. Следовательно, график функции всюду вогнут.

Для определения участков выпуклости решаем неравенство: $y''=\frac{3}{4\sqrt{x}}<0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет участков выпуклости.

7) Точки перегиба:

Для определения точек перегиба решаем уравнение: $y''=\frac{3}{4\sqrt{x}}=0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.



8) Для построения графика функции начертим оси координат и отметим выявленные нами точки: минимума (16;-32) и пересечения с осями координат (0;0) и (36;0), а также области возрастания-убывания функции и ее вогнутости. В результате получим график, изображённый на рисунке.

Задание:

1) Исследовать и построить график функции $y=\frac{1}{3}x^3-4x$.

2) Исследовать и построить график функции $y=\frac{1}{4}x^4+8x$.

3) Исследовать и построить график функции $y=-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2+7$.

4) Исследовать и построить график функции $y=x^4-5x^2+4$.

5) Исследовать и построить график $y=x^4-2x^2+1$.

6) Исследовать и построить график функции $y=x^4-12x^2+9$.

Практическое занятие № 4

Решение задач на приложения производной

Цель: Закрепить умение применять производную в различных задачах

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ПРОИЗВОДНАЯ

Производные элементарных функций

1. $(C)'=0$	2. $(x)'=1$	3. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	4. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	5. $\left(e^x\right)'=e^x$
6 $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	7. $\left(\ln x=\dfrac{1}{x}\right)$	8. $(\sin x)'=\cos x$	9. $(\cos x)'=-\sin x$	10. $tgx'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $ctgx'=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$	12.$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	13/$(arcctgx)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$	14.$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15.$(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования:

5. $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x);\ \left(f(x)-g(x)\right)'=f'(x)-g'(x)$
6. $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
7. $(kf(x))'=kf'(x)$
8. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Производная сложной функции: $f(\varphi(x))'=f'(u)(\varphi'(x))$

Исследование функции

Рассмотрим последовательность выполнения операций при исследовании функции и построении ее графика на следующем примере.

Пример. Исследуйте функцию и постройте ее график $y=x\sqrt{x}-6x$

Решение.

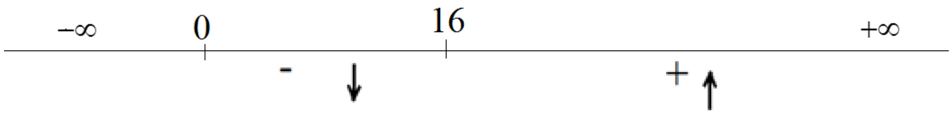
1) Область определения. $x\in[0,+\infty)$

2) Функция не периодическая.

3) Функция общего свойства, то есть не относится ни к четным, ни к нечетным, так как $y(-x)\neq y(x);\ y(-x)\neq -y(x).$.

3) Области возрастания-убывания.

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}-6;\quad \frac{3}{2}\sqrt{x}-6x=0;\ \frac{9}{4}x=36;\ 9x=144;\ x=16;\ x-16=0$$



$x\in(0;16)$ - функция убывает; $x\in(16;+\infty)$ - функция возрастает

4) Точки экстремумов: при переходе через $x=16$ первая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно при $x=16$ имеем минимум. Для определения значения этого минимума подставим $x=16$ в уравнение кривой:

$y(16) = 16\sqrt{16} - 6 \cdot 16 = 64 - 96 = -32.$ Таким образом, у графика функции имеется точка минимума с координатами (16; -32).

5) Точки пересечения с осями координат.

Для определения ординаты точки пересечения с осью Oy подставим в уравнение кривой $x = 0$. В результате получим: $y(0) = 0\sqrt{0} - 6 \cdot 0 = 0$.

Таким образом, график функции пересекает ось Oy при $y = 0$.

Для определения абсциссы точки пересечения с осью Ox подставим в уравнение кривой $y = 0$. В результате получим:

$$0 = x\sqrt{x} - 6x; \quad x(\sqrt{x} - 6) = 0; \quad x_1 = 0; \quad \sqrt{x} - 6 = 0; \quad x_2 = 36.$$

Таким образом, график функции пересекает ось Ox в двух точках: при $x = 0$ и $x = 36$.

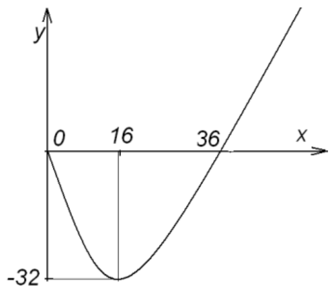
6) Области выпуклости-вогнутости.

Для определения участков вогнутости решаем неравенство: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} > 0$. Оно справедливо для любого x из области определения. Следовательно, график функции всюду вогнут.

Для определения участков выпуклости решаем неравенство: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} < 0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет участков выпуклости.

9) Точки перегиба:

Для определения точек перегиба решаем уравнение: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} = 0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.



10) Для построения графика функции начертим оси координат и отметим выявленные нами точки: минимума (16;-32) и пересечения с осями координат (0;0) и (36;0), а также области возрастания-убывания функции и ее вогнутости. В результате получим график, изображённый на рисунке.

Применение производной в геометрии

Производная функции $y = f(x)$ *в* некоторой точке x_0 численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке (x_0, y_0).

Касательной к графику функции $y = f(x)$ *, дифференцируемой в точке* x_0*, называется прямая, проходящая через точку* $(x_0, f(x_0))$ *и имеющая угловой коэффициент* $k = f'(x_0)$.

При названных условиях уравнение касательной имеет следующий вид:

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$$

Механический смысл производной.

Если закон прямолинейного движения точки задан уравнением $s = f(t)$, где s- путь; t - время, то мгновенная скорость движения vв момент t определяется равенствами

$$v = f'(t) = s',$$

т. е. скорость точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от пути s по времени.

Ускорение точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от скоростиv по времени или вторая производная от пути s по времени.

Задание:

Вариант 1

1. Найдите производные: $y=\left(\cos x+x^2\right)\cdot x^4$ и $y=\sin\left(x^3-x^2\right)$.
2. Для функции $f(x)=3x-2tgx$ найдите $f'(0)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2-6x+5$ в точке $x_0=4$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 4с, если $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2-3$.
5. Найдите значение точки максимум x_0 для функции $y=-x^3-12x^2-36x+11$.

Вариант 2

1. Найдите производные: $y=\left(x^2+5x\right)\cdot e^x$ и $y=\left(x^2+7x-1\right)^3$.
2. Для функции $f(x)=10x+3\cos x$ найдите $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=2x^2-5x-3$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 5с, если $S=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2$.
5. Найдите значение точки максимум x_0 для функции $y=x^3-12x^2+45x-5$.

Вариант 3

1. Найдите производные: $y=\left(\sin x+3x^2\right)\cdot x^5$ и $y=\left(4x^2-2x+1\right)^3$.
2. Для функции $f(x)=2e^x+4x$ найдите $f'(0)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2+6x+8$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 3с, если $S=2t^3-5t^2+6$.
5. Найдите значение точки минимум x_0 для функции $y=-x^3+12x^2-21x+12$.

Вариант 4

1. Найдите производные: $y=(x-\cos x)\cdot\sin x$ и $y=\left(x^2+3x+5\right)^5$.
2. Для функции $f(x)=9\sin x+14x$ найдите $f'(\pi)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2+2x-8$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 2с, если $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2+3$.

Найдите значение точки минимум x_0 для функции $y=x^3-12x^2+36x-7$.

Практическое занятие № 5

Вычисление простейших определенных интегралов

Цель: Закрепить умение вычислять определенные интегралы

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первообразная. Неопределенный интеграл

*Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка существует производная **F'(x)**, равная $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.*

Множество первообразных для данной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования; С - константа.

Неопределенные интегралы элементарных функций

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

Методы интегрирования

Ниже перечислены основные свойства интегралов.

1. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*
   $$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx \ (3.3)$$
2. *Интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов:*
   $$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \ (3.4)$$
3. *Вид интеграла не зависит от вида переменной интегрирования:*
   $$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(dx)] + C. \ (3.5)$$
   или, что тоже самое,
   $$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(dx)] + C,$$
   где $\varphi(x)$ - функция, непрерывная вместе со своей производной.

Рассмотрим основные методы интегрирования:

I. *Непосредственное интегрирование.*

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример. Найти $\int\left(4x^3-15x^2+14x-3\right)dx$

Решение. Воспользуемся свойством 2. интеграла: интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих же функций.

$$\int\left(4x^3-15x^2+14x-3\right)dx=\int 4x^3dx-\int 15x^2dx+\int 14xdx-\int 3dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-15\frac{x^3}{3}+14\frac{x^2}{2}-3x+C=$$
$$=x^4-5x^3+7x^2-3x+C$$

II. ***Метод подстановки.***

Этот метод называют также *методом замены переменной.*

Пример. Найти $\int(2+x)^7dx$

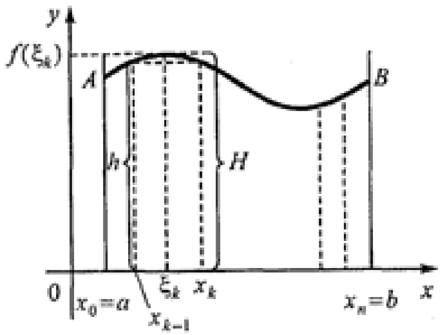
Решение. Введем новую переменную: $2+x=t;\ x=t-2;\ dx=dt$. Найдем интеграл:

$\int(2+x)^7dx=\int t^7dt=\frac{t^8}{8}+C$ Выразим результат через первоначальный аргумент:

$$\int(2+x)^7dx=\frac{(2+x)^8}{8}+C$$

Определенный интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции. *Дана плоская фигура, ограниченная графиком функции* $y=f(x)>0$ *и отрезками прямых* $y=0,\ x=a,\ x=b$. *Функция* $y=f(x)$ *определена, не*прерывна и неотрицательна в промежутке $[a,b]$. Вычислить площадь S полученной фигуры $aABb$, называемой *криволинейной трапецией.*



Определение. *Предел* $S=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ *называют* **определенным интегралом** *от функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a,\ b]$ *и обозначают* $\int_a^b f(x)dx$ *т. е.*

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

Число a *называется* **нижним пределом** *интеграла,* b-**верхним**.

Промежуток $[a,\ b]$ *называется* **промежутком интегрирования**, *x*-**переменной интегрирования.**

Теорема. *Определенный интеграл функции* $f(x)$, *непрерывной на промежутке [a, b], равен разности значений любой ее первообразной в точках* b *и* a

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$ *формулы Ньютона-Лейбница.*

Пример. Вычислить $\int\limits_{-2}^{3}xdx$

Решение. Находим неопределенный интеграл: $\int\limits_{-2}^{3}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}$ Найдя значение $\frac{x^2}{2}$ сначала при $x=3$, а затем при $x=-2$, вычислим разность: $\int\limits_{-2}^{3}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}=\frac{3^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=\frac{9-4}{2}=2{,}5$

Приложения определенного интеграла в механике

Путь, пройденный телом при неравномерном движении за время $t_2 - t_1$, вычисляется по формуле: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt,\ f(t) = v$.

Пример. Скорость движения материальной точки задана уравнением $v = 9t^2 - 8t,\ м/с$. Определить ее путь за четвертую секунду.

Решение. $t_1 = 3с, \quad t_2 = 4с$

$$S = \int\limits_3^4 \left(9t^2 - 8t\right)dt = \left(3t^3 - 4t^2\right)\Big|_3^4 = \left(3\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2\right) - \left(3\cdot 3^3 - 4\cdot 3^2\right) = 128 - 45 = 83м.$$

Ответ *83 м*.

Пример. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2 м/с$. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение Скорость движения тела равна пулю в моменты начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно *t*:

$12t - 3t^2 = 0;\ 3t(4 - t) = 0;\ t_1 = 0;\ t_2 = 4$ t_1, t_2 - пределы интегрирования.

$S = \int\limits_0^4 \left(12t - 3t^2\right)dt = \left(6t^2 - t^3\right)\Big|_0^4 = 6\cdot 4^2 - 4^3 = 32м$ **Ответ.** *S = 32 м.*

Задание:

Вариант 1.

1. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int\limits_{-2}^{2} 5x^4 dx$,

   $\int\limits_{1}^{2} \left(4x^3 - 6x^2 + 2x + 1\right) dx$ и $\int\limits_{4}^{25} \frac{3}{\sqrt{x}} dx$.

2. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int\limits_{1}^{2} (4x-3)^3 dx$.

3. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V = 8t + 1$.

Вариант 2.

1. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int\limits_{-2}^{1} 12x^3 dx$,

   $\int\limits_{2}^{3} \left(3x^2 + 6x - 2\right) dx$ и $\int\limits_{9}^{16} \frac{2}{\sqrt{x}} dx$.

2. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int\limits_{1}^{2} (5x-4)^2 dx$.

3. Найдите путь, пройденный телом за 4 секунды, если его скорость определяется формулой: $V = t + 6$.

Вариант 3.

1. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int\limits_{-1}^{2} 16x^3 dx$,

   $\int\limits_{2}^{3} \left(3x^2 - 4x - 1\right) dx$ и $\int\limits_{1}^{4} \frac{4}{\sqrt{x}} dx$.

2. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int\limits_{1}^{2} (4x-2)^2 dx$.

3. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V = 2t + 3$.

Вариант 4.

1. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int\limits_{-3}^{1} 8x^3 dx$

   $\int\limits_{0}^{1} \left(3x^3 - 5x^2 + x + 2\right) dx$ и $\int\limits_{1}^{9} \frac{5}{\sqrt{x}} dx$.

2. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int\limits_{1}^{2} (6x-5)^2 dx$.

3. Найдите путь, пройденный телом за 3 секунды, если его скорость определяется формулой: $V = 10t - 8$.

Практическое занятие № 6

Вычисление определенных интегралов методом подстановки

Цель: Закрепить умение вычислять определенные интегралы

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Метод подстановки.

Этот метод называют также *методом замены переменной.* Использование этого метода основано на свойстве 3 интеграла. Его следует применять, когда интеграл не привести к табличному виду с помощью тождественных преобразований, и в то же время можно привести к табличному виду с помощью замены переменных.

Пример. Найти $\int (2+x)^7 dx$

Решение. Введем новую переменную: $2+x=t;\ x=t-2;\ dx=dt$. Найдем интеграл: $\int (2+x)^7 dx = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8}+C$ Выразим результат через первоначальный аргумент: $\int (2+x)^7 dx = \frac{(2+x)^8}{8}+C$

Теорема. *Определенный интеграл функции* $f(x)$*, непрерывной на промежутке [a, b], равен разности значений любой ее первообразной в точках* b *и* *a*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$ *формулы Ньютона-Лейбница.*

Пример. Вычислить $\int_{-2}^{3} xdx$

Решение. Находим неопределенный интеграл: $\int_{-2}^{3} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}$ Найдя значение $\frac{x^2}{2}$ сначала при $x=3$, а затем при $x=-2$, вычислим разность:

$$\int_{-2}^{3} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3} = \frac{3^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2} = \frac{9-4}{2} = 2{,}5$$

Задание:

Вариант 1

Вычислите определенные интегралы способом подстановки:

$$\int_1^2 (5x-4)^2 \, dx$$

$$\int_1^2 (4x-3)^3 \, dx .$$

$$\int_1^3 (3x-2)^3 \, dx$$

$$\int_0^1 \left(7-6x^3\right)^2 x^2 dx$$

Вариант 2

Вычислите определенные интегралы способом подстановки:

$$\int_1^2 (4x-2)^2 \, dx .$$

$$\int_1^2 (6x-5)^2 \, dx .$$

$$\int_2^4 (2x-3)^4 \, dx$$

$$\int_0^1 \left(6-5x^4\right)^2 x^3 dx$$

<u>Практическое занятие № 7</u>

Решение задач на приложения определенного интеграла

Цель: Закрепить умение применять определенный интеграл при решении задач

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Приложения определенного интеграла в механике

Путь, пройденный телом при неравномерном движении за время $t_2 - t_1$**, вычисляется по формуле:** $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt,\ f(t) = v$.

Пример. Скорость движения материальной точки задана уравнением $v = 9t^2 - 8t,\ м/с$. Определить ее путь за четвертую секунду.

Решение. $t_1 = 3с, \quad t_2 = 4с$

$$S = \int\limits_3^4 \left(9t^2 - 8t\right)dt = \left(3t^3 - 4t^2\right)\Big|_3^4 = \left(3\cdot4^3 - 4\cdot4^2\right) - \left(3\cdot3^3 - 4\cdot3^2\right) = 128 - 45 = 83м.$$

Ответ *83 м*.

Пример. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2 м/с$. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

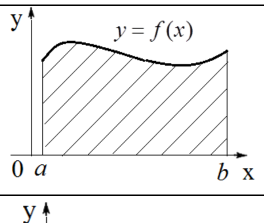
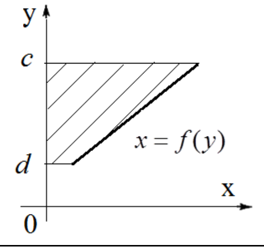
Решение Скорость движения тела равна пулю в моменты начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно *t*:

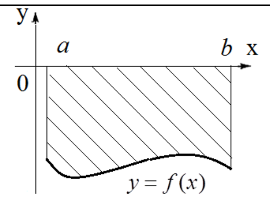
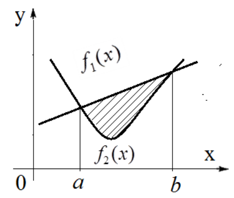
$12t - 3t^2 = 0; 3t(4-t) = 0; t_1 = 0; t_2 = 4$ t_1, t_2 - пределы интегрирования.

$$S = \int\limits_0^4 \left(12t - 3t^2\right)dt = \left(6t^2 - t^3\right)\Big|_0^4 = 6\cdot4^2 - 4^3 = 32м$$ **Ответ.** *S = 32 м.*

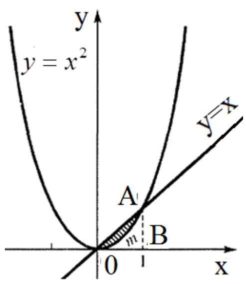
Площади плоских фигур и объемы тел вращения

Формулы для вычисления площади плоской фигуры.

Тип условия задачи	Чертеж	Формула
1		$S = \int\limits_a^b f(x)dx$
2		$S = \int\limits_d^c f(y)dy$

3		$$S=-\int_a^b f(x)dx$$
4		$$S=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную графиками функций: $y=x^2;\ y=x$



Решение. Построим графики данных функций, найдя прежде точки их пересечения путем решения системы: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$. Решив эту систему, получим точки O(0; 0) и A(1; 1).

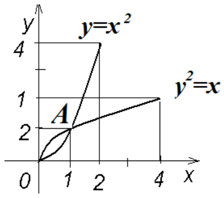
В данном случае подходит тип условия 4 задачи.

$$S=\int_0^1 (x-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ кв.ед.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная линией $y=f(x)\geq 0$ ***и прямыми*** $y=0;\ x=a;\ x=b$***, вращается вокруг оси x, то объем тела вращения вычисляется по формуле:*** $$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

Если фигура, ограниченная линиями $y_1=f_1(x)\geq 0$ ***и*** $y_2=f_2(x)\geq 0$ $\left(0\leq f_1(x)\leq f_2(x)\right)$ ***прямыми*** $x=a;\ x=b$***, вращается вокруг оси*** Ox***, то объем тела вращения вычисляется по формуле:*** $V=\pi\int_a^b \left(y_2^2-y_1^2\right)dx$

Пример. Найдите объем тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями: $y^2=x;\ y=x^2$



Решение. Определим координаты точки пересечения этих линий из системы:

$$\begin{cases} y^2=x \\ y=x^2 \end{cases};\ y^4=y;\ y(y^3-1)=0;\ y_1=0;\ y_2=1;\ x_1=0;\ x_2=1\ .$$

Таким образом, имеем две точки пересечения линий: $O(0;0),\ A(1;1)$. По формуле имеем: $V=\pi\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\pi\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi(куб.ед.)$.

Задание:

Вариант 1.

1. Скорость движения тела изменяется по закону $V(t)=(3t^2+t+1)$м/с. Найдите путь, пройденный телом за 4с от начала движения.
2. Найдите путь, пройденный телом за 5-ю секунду, зная, что скорость его прямолинейного движения выражается формулой $V = 3t^2 - 4t - 2$ м/с.
3. Скорость движения точки выражается формулой $V=(18t - 3t^2)$м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
4. Два тела одновременно выходят из одной точки: одно со скоростью $V_1=5t$ м/с, другое – со скоростью $V_2=3t^2$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 секунд, если движутся по прямой в одном направлении?
5. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 6$ и прямой $y = 7 - x$.
6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, \quad y = 0$.

Вариант 2

1. Скорость движения тела изменяется по закону $V(t)=(3t^2-2t-2)$м/с. Найдите путь, пройденный телом за 3с от начала движения.
2. Найдите путь, пройденный телом за 2-ю секунду, зная, что скорость его прямолинейного движения выражается формулой $V=(6t^2+t)$м/с.
3. Скорость движения точки выражается формулой $V=(15t - 5t^2)$м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
4. Два тела одновременно выходят из одной точки: одно со скоростью $V_1=(6t^2+2t)$ м/с, другое – со скоростью $V_2=(4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 секунд, если движутся по прямой в одном направлении?
5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x; \quad y = x.$
6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy линии, $y = x^2 + 1$ в пределах от $a = 2$ до $b = 4$.

Вариант 3

1. Скорость движения тела изменяется по закону $V(t)=(3t^2-t-7)$м/с. Найдите путь, пройденный телом за 4с от начала движения.
2. Найдите путь, пройденный телом за 3-ю секунду, зная, что скорость его прямолинейного движения выражается формулой $V = 3t^2 - 4t - 2$ м/с.
3. Скорость движения точки выражается формулой $V=(21t - 3t^2)$м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
4. Два тела одновременно выходят из одной точки: одно со скоростью $V_1=5t$ м/с, другое – со скоростью $V_2=3t^2$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 секунд, если движутся по прямой в противоположных направлениях?
5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + x$ и $y = 0$.
6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной линиями, $y^2 = 9x$ и $y = 3x$.

Вариант 4

1. Скорость движения тела изменяется по закону $V(t)=(3t^2+2t-6)$м/с. Найти путь, пройденный телом за 5с от начала движения.
2. Найти путь, пройденный телом за 4-ю секунду, зная, что скорость его прямолинейного движения выражается формулой $V=(6t^2-t)$м/с.
3. Скорость движения точки выражается формулой $V=(24t - 3t^2)$м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
4. Два тела одновременно выходят из одной точки: одно со скоростью V1=(6t2+2t) м/с, другое – со скоростью V2=(4t +5)м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 секунд, если движутся по прямой в противоположных направлениях?
5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x; \quad y = x.$
6. Вычислить объем тела, образованного, вращением одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ вокруг оси Ox.

Практическое занятие № 8

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$f(x,\ y,\ y')=0$$

или

$$y'=F(x,\ y).$$

Определение ***Решением дифференциального уравнения первого порядка*** *называется функция $y=\varphi(x)$, один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.*

Пример *Решить уравнение*

$$y'=x.$$

Р е ш е н и е. Решением уравнения является функция $y(x)=\frac{x^2}{2}+C$, где C — произвольная действительная постоянная.

Определение ***Общим решением дифференциального уравнения*** *называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения.*

Таким образом, если решение дифференциального уравнения задается формулой $y=\varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C)=0$, то она задает общее решение, если

1. при каждом фиксированном $C=C_0$ эта функция определяет решение;
2. любое решение может быть найдено из этой формулы при некотором $C=C_0$.

Определение ***Частным решением дифференциального уравнения*** *называется решение, полученное из формулы (формул) общего решения при некотором значении $C=C_0$.*

В примере формула $y=\frac{x^2}{2}+C$ задает общее решение, а, например, решения $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^2}{2}+1$ — частные решения.

Найти решение дифференциального уравнения — значит выразить решение в квадратурах — через элементарные функции и их неопределенные интегралы.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение . ***Уравнениями с разделяющимися переменными*** *называются уравнения вида*

$$y' = f(x)g(y)$$

или

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0.$$

Метод разделения переменных (формальный).

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

Умножив уравнение на $\frac{dx}{g(y)}$, получим

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcl} \frac{dy}{g(y)} & = & f(x)dx, \\ g(y) & \neq & 0, \end{array}\right. \\ g(y) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow y(x) \text{ — делаем проверку, подставляя в уравнение.}$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

откуда находим решение в виде $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$.

Замечание Общее решение может не задаваться одной формулой. Иногда форма его записи зависит от способа записи постоянной или от метода интегрирования.

Пример *Решить уравнение* $y' = xy^2$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcl} \frac{dy}{y^2} & = & xdx, \\ y & \neq & 0, \end{array}\right. \\ y = 0. \end{array}\right.$$

$y \equiv 0$ — решение, проверяется подстановкой в уравнение.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

Отметим, что решение $y(x) \equiv 0$ не получается из этой формулы ни при каком значении C, поэтому общее решение определяется их совокупностью.

Задание:

Вариант 1

1. Выяснить является ли данная функция решением д у
   $y = 5e^{-2x} - 2x + 1, y' + 2y = -4x$
2. Решите д у с разделёнными переменными $2ydy = 3x^2dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $2xdy = (y+2)dx$; $xy' - y = 0$
4. Найдите частное решение, если: $y' = y, y(-2) = 4$

Вариант 2

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = \cos 2x, y' + 2xy = 0$
2. Решите д у с разделёнными переменными $3y^2dy = 4x^3dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $(x-2)dy = 2ydx.$; $xy' = yx^2$
4. Найдите частное решение, если: $xy' + y = 0, y(-2) = 8$

Вариант 3

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = x + Ce^x, (x - y + 1)y' = 1$
2. Решите д у с разделёнными переменными $3y^2dy = 2xdx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $2xdy = (y-2)dx$; $yy' + x = 0$
4. Найдите частное решение, если: $2\sqrt{y}dx = dy, y(0) = 1$

Вариант 4

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = 3e^{-x} - x + 1, y' + y = -x$
2. Решите д у с разделёнными переменными $4y^3dy = 3x^2dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $(x+2)dy = 2ydx.$; $x^2y' + y = 0$
4. Найдите частное решение, если: $x^2y' + y^2 = 0, y(-1) = 1$

Практическое занятие № 9

Решение неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка

Цель: Научиться решать неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)\ ,$$

где p и q – функции переменной x.

Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = 0$$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x); \quad q(x) \neq 0$$

Член $q(x)$ называется неоднородной частью уравнения.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка:

(1) $y' + p(x)\,y = q(x)$.

Существует три способа решения этого уравнения:

- метод интегрирующего множителя;
- метод введения двух функций (Бернулли);
- метод вариации постоянной (Лагранжа).

Метод введения двух функций (Бернулли)

Ищем решение исходного уравнения в виде произведения двух функций:
$y = u \cdot v$
где u, v - функции от x. Дифференцируем:
$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Подставляем в исходное уравнение:
$u'v + uv' + p(x)\,uv = q(x)$
Выносим u за скобки:
(1) $u'v + u(v' + p(x)\,v) = q(x)$
В качестве v возьмем любое, отличное от нуля, решение уравнения:
(2) $v' + p(x)\,v = 0$
Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dv}{dx} + p(x)\,v = 0$$

Разделяем переменные. Умножаем обе части уравнения на dx и делим на v

$$\frac{dv}{v} + p(x)\,dx = 0$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} + \int p(x)\,dx = C$$

Постоянную С возьмем равной нулю, поскольку нам нужно любое, отличное от нуля, решение.

$$\int \frac{dv}{v} = \ln|v| = -\int p(x)\,dx$$

Потенцируем и опускаем знак модуля (Знак модуля сводится к умножению на постоянную ± 1).

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}$$

Подставим в **(1)** учитывая, что согласно **(2)**, выражение в скобках равно нулю:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = q(x)$$

Отсюда

$$\frac{du}{dx} = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}$$

Интегрируем

$$u = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C$$

Окончательно находим:

$$y = uv = \left[\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right] \cdot e^{-\int p(x)\,dx} =$$

$$C \cdot e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\,.$$

Метод вариации постоянной (Лагранжа)

В методе вариации постоянной мы решаем уравнение в два этапа. На первом этапе мы упрощаем исходное уравнение и решаем однородное уравнение. На втором этапе мы заменим постоянную интегрирования, полученную на первой стадии решения, на функцию. После чего ищем общее решение исходного уравнения.

Рассмотрим уравнение:

(1) $y' + p(x)y = q(x)$

Шаг 1 Решение однородного уравнения

Ищем решение однородного уравнения:

$y' + p(x)\,y = 0$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0$$

Разделяем переменные - умножаем на dx, делим на y:

$$\frac{dy}{y} + p(x)\,dx = 0$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = C$$

Интеграл по y - табличный:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$$

Тогда

$$\ln|y| = C - \int p(x)\,dx$$

Потенцируем:

$$|y| = e^C \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

Заменим постоянную e^C на C и уберем знак модуля, что сводится к умножению на постоянную ± 1, которую включим в C:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

Шаг 2 Заменим постоянную C на функцию

Теперь заменим постоянную C на функцию от x:

$C \to u(x)$

То есть, будем искать решение исходного уравнения **(1)** в виде:

(2) $y = u(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$

Находим производную.

$$\left(-\int p(x)\,dx\right)' = -p(x)$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\left(e^{-\int p(x)\,dx}\right)' = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \left(-\int p(x)\,dx\right)' = -e^{-\int p(x)\,dx} \cdot p(x)\,.$$

По правилу дифференцирования произведения:

$$y' = u'(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} + u(x) \cdot \left(e^{-\int p(x)\,dx}\right)' =$$

$$u'(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} - u(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Подставляем в исходное уравнение **(1)**:

(1) $y' + p(x)y = q(x)$;

$$u'(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} - u(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} +$$

$$p(x) \cdot u(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = q(x).$$

Два члена сокращаются:

$$u'(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = q(x);$$

$$u'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

Интегрируем:

$$u(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} dx + C.$$

Подставляем в **(2)**:

$$y = u(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} dx + C\right] \cdot e^{-\int p(x)\,dx}.$$

В результате получаем общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} dx.$$

Задание:

Вариант 1

1. Решите линейное д у 1 порядка $y' - \frac{2}{x} y = x^4$
2. Решите линейное д у 1 порядка $y' + 3y = e^{2x}$

Вариант 2

1. Решите линейное д у 1 порядка $xy' + y = x^2$
2. Решите линейное д у 1 порядка $y' - y = e^x$

Вариант 3

1. Решите линейное д у 1 порядка $y' + \frac{y}{x} = 3x$
2. Решите линейное д у 1 порядка $y' - 4y = e^{2x}$

Вариант 4

1. Решите линейное д у 1 порядка $y' + \frac{4y}{x} = x^2$
2. Решите линейное д у 1 порядка $xy' + y = e^x$

Практическое занятие № 10

Решение неполных дифференциальных уравнений второго порядка

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где F − заданная функция указанных аргументов.

Если дифференциальное уравнение можно разрешить относительно второй производной y'', то его можно представить в следующем явном виде:

$$y'' = f(x, y, y').$$

В частных случаях функция f в правой части может содержать лишь одну или две переменных. Такие*неполные уравнения* включают в себя 5 различных типов:

$$y'' = f(x), \quad y'' = f(y), \quad y'' = f(y'), \quad y'' = f(x, y'), \quad y'' = f(y, y').$$

С помощью определенных подстановок эти уравнения можно преобразовать в уравнения первого порядка.

В случае произвольных дифференциальных уравнений второго порядка, их порядок можно понизить, если эти уравнения обладают определенной симметрией. Ниже мы обсудим 2 типа таких уравнений (случаи 6 и 7):

- Функция $F(x, y, y', y'')$ является однородной функцией аргументов y, y', y'';

- Функция $F(x, y, y', y'')$ является точной производной функции первого порядка $\Phi(x, y, y')$.

Итак, рассмотрим указанные случаи понижения порядка более подробно.

Случай 1. Уравнение вида y''= f (x)

Если дано уравнение $y'' = f(x)$, то его порядок можно понизить введением новой функции $p(x)$, такой, что$y' = p(x)$. В результате мы получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p' = f(x).$$

Решая его, находим функцию $p(x)$. Затем решаем второе уравнение

$$y' = p(x)$$

и получаем общее решение исходного уравнения.

Случай 2. Уравнение вида y''= f (y)

Здесь правая часть уравнения зависит только от переменной y. Вводим новую функцию $p(y)$, полагая$y' = p(y)$. Тогда можно записать:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(y'\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

и уравнение принимает вид:

$$\frac{dp}{dy}p = f\left(y\right).$$

Решая его, находим функцию $p(y)$. Затем находим решение уравнения $y' = p(y)$, то есть функцию $y(x)$.

Случай 3. Уравнение вида $y''= f(y')$

В данном случае для понижения порядка вводим функцию $y' = p(x)$ и получаем уравнение

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = f\left(p\right),$$

которое является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными p и x. Интегрируя, находим функцию $p(x)$ и затем функцию $y(x)$.

Случай 4. Уравнение вида $y''= f(x,y')$

Используем подстановку $y' = p(x)$, где $p(x)$ − новая неизвестная функция, и получаем уравнение первого порядка

$$p' = \frac{dp}{dx} = f\left(x,p\right).$$

Интегрируя, определяем функцию $p(x)$. Далее решаем еще одно уравнение 1-го порядка

$$y' = p\left(x\right)$$

и находим общее решение $y(x)$.

Случай 5. Уравнение вида $y''= f(y,y')$

Для решения такого уравнения, также как и в случае 2, вводим новую функцию $p(y)$, полагая $y' = p(y)$. Дифференцирование этого равенства по x приводит к уравнению

$$y'' = \frac{d\left(y'\right)}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

В результате наше исходное уравнение записывается в виде уравнения 1-го порядка

$$p\frac{dp}{dy} = f\left(y,p\right).$$

Решая его, находим функцию $p(y)$. Затем решаем еще одно уравнение первого порядка

$$y' = p\left(y\right)$$

и определяем общее решение $y(x)$.

Задание:

Вариант 1

5. Найти общее решение уравнения: $y'' = x^2 - 2x$
6. Найти частное решение уравнения: $y'' = x - 1$, если $y = \frac{1}{2}, x = 0; y = 5, x = 1.$
7. Найти общее решение уравнения: $y'' = x\cos x$;
8. Найти общее решение уравнения: $y'' = 2y'$

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения: $y'' = \sin x + \cos x$
2. Найти частное решение уравнения: $y'' = 5x + 2$, если $y = 5, x = 0; y = 3, x = 1.$
3. Найти общее решение уравнения: $y'' = x\sin x$;
4. Найти общее решение уравнения: $y'' = 2\sqrt{1 - (y')^2}$

<u>Практическое занятие № 11</u>

Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y'' + py' + q = 0,$$

где p и q — действительные числа. Рассмотрим, как решаются однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка зависит от корней характеристического уравнения. Характеристическое уравнение — это уравнение $\mathbf{k^2+pk+q=0}$.

1) Если корни характеристического уравнения — различные действительные числа:

$$k_1 \in R, k_2 \in R, k_1 \neq k_2,$$

то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) Если корни характеристического уравнения — равные действительные числа

$$k_1 \in R, k_2 \in R, k_1 = k_2$$

(например, при дискриминанте, равном нулю), то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка есть

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

3) Если корни характеристического уравнения — комплексные числа

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

(например, при дискриминанте, равном отрицательному числу), то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка записывается в виде

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Задание:

<u>Вариант 1</u>

1. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y''-7y'+12y=0$; b) $y''-2y'+y=0$; c) $y''-2y'+10y=0$
2. Найдите общее решение неоднородного уравнений: a) $y''=2x$; b) $y''-2y'-3y=x^2+1$

<u>Вариант 2</u>

1. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y''+3y'+2y=0$; b) $y''-4y'+4y=0$; c) $y''+4y'+13y=0$
2. Найдите общее решение неоднородного уравнений: a) $y''-2y'-3y=2x$; b) $y''+3y'=1$

<u>Вариант 3</u>

1. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y''-5y'+6y=0$; b) $y''+6y'+9y=0$; c) $y''+4y'+8y=0$
2. Найдите общее решение неоднородного уравнений: a) $y''+y'-2y=2x+5$; b) $y''-2y'-3y=x^2$

<u>Вариант 4</u>

1. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y''-y'-6y=0$; b) $y''+4y'+4y=0$; c) $y''+25y=0$
2. Найдите общее решение неоднородного уравнений: a) $y''-y'=4+x$; b) $y''-4y=8x^3$

Практическое занятие № 12

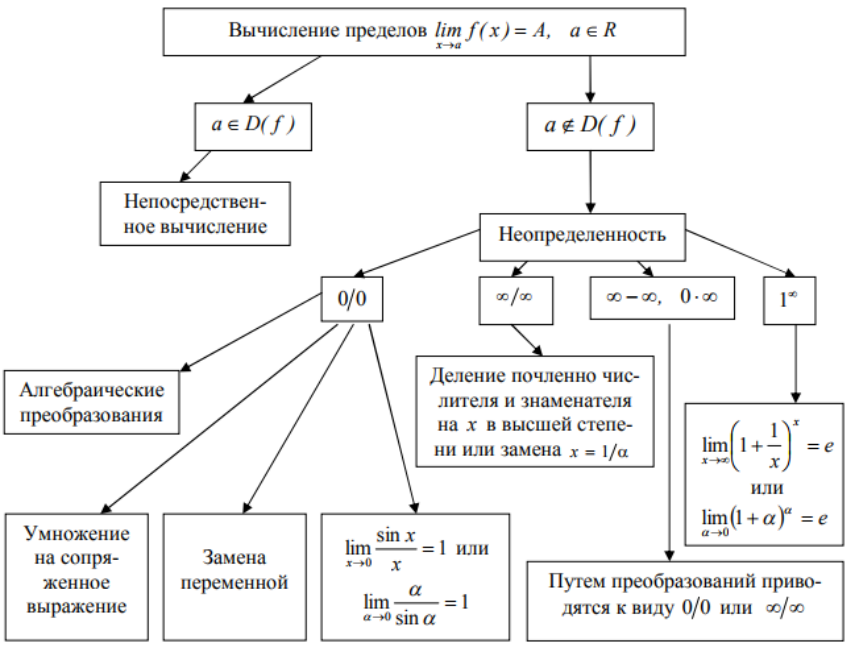
Определение сходимости числовых рядов. Решение задач на применение признака сходимости Даламбера

Цель: Научиться определять сходимость числовых рядов

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Способы вычисления пределов



Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданной отношением двух многочленов, существует два способа:

1) каждый член числителя и знаменателя необходимо разделить на x в наивысшей степени;

2) применить метод замены переменной: $x = \frac{1}{\alpha}$ (при $x \to \infty$ $\alpha \to 0$).

Пример Найти $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$.

1 способ: $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x \to \infty}\frac{2 - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{4}{x}} = \frac{2}{3}$, так как при $x \to \infty$ каждая из дробей $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{4}{x}$ стремится к нулю.

а) Дробно-рациональные функции. В этом случае: в числителе и знаменателе выделяется множитель $(x-a)$ и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель;

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Применим способ группировки слагаемых в числителе и знаменателе дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

б) Дробно-иррациональные функции. Для избавления от неопределенности в этом случае существует два способа:

1) умножение числителя и знаменателя дроби на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

2) метод замены переменной.

В результате таких преобразований удается свести данный случай к уже рассмотренному в предыдущем пункте.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}x=t^6,\ \sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2,\\ x\to 1\Rightarrow t\to 1\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

в) Пределы от функций, в которых участвуют *тригонометрические выражения*, обычно сводятся к *первому замечательному пределу*.

Теорема (признак Даламбера). Если в ряде с положительными ми $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ отношение $(n+1)$-го члена ряда к n-му при $n\to\infty$ имеет конечный предел D, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D$, то:- ряд сходится в случае $D<1$,- ряд расходится в случае $D>1$.В случаях, когда предел не существует или он равен единице, ответа на вопрос о сходимости или расходимости числового ряда теорема не дает. Необходимо провести дополнительное исследование.

Задание:

Вариант 1

1. Найдите вторые члены рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$;

2. Найдите частичную сумму S_2 для рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n+1)(n+2)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n+1)n$

3. Выясните, сходится или расходится ряд, используя необходимый признак сходимости:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n-7}{7n^2+10n-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^5-4n^4+1}{1-4n^3+7n^4}$;

4. Выясните, сходится или расходится ряд, используя достаточный признак сходимости (Даламбера):

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdots(2n+5)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$

Вариант 2

1. Найдите вторые члены рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$;

2. Найдите частичную сумму S_2 для рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

3. Выясните, сходится или расходится ряд, используя необходимый признак сходимости:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^4+4}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)(n^2+4)}{2n^4+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2n+5}{1+10n+7n^2}$;

4. Выясните, сходится или расходится ряд, используя достаточный признак сходимости (Даламбера):

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^{3n+2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{3\cdot7\cdot11\cdots(4n-1)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^4}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{1\cdot4\cdot10\cdots(3n+1)}$

Практическое занятие № 13

Выполнение операций над множествами

Цель: Научиться выполнять операции над множествами

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

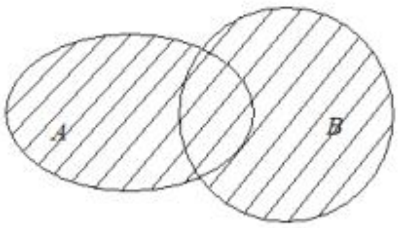
Операции над множествами

Основными операциями над множествами являются *объединение*, *пересечение*, *разность и дополнение*.

Определение 1. *Объединением* двух множеств называется новое множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (обозначается: $A \cup B$), т.е.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

На кругах Эйлера объединение множеств A и B изображается в виде заштрихованной области.



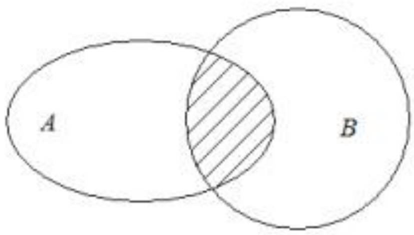
Например, пусть заданы три множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{5, 6\}$.
Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Определение 2. *Пересечением* двух множеств называется новое множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно обеим множествам (обозначается: $A \cap B$), т.е.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Например, для заданных множеств A, B и C: $A \cap B = \{1, 3\}$, $B \cap C = \{5\}$, $A \cap C = \varnothing$.

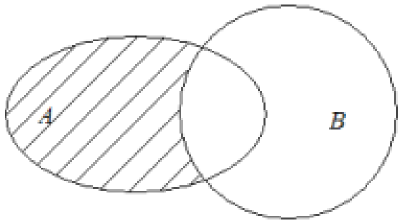
На кругах Эйлера пересечение множеств A и B изображается в виде заштрихованной области.



Определение 3. *Разностью* двух множеств A и B называется новое множество, элементы которого принадлежат A, но не принадлежат B (обозначают: $A \setminus B$), т.е.

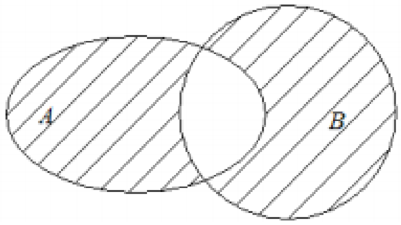
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

На кругах Эйлера разность множеств A и B изображается в виде заштрихованной области.



Например, для заданных множеств A, B и C: $A \setminus B = \{2, 4\}$, $B \setminus C = \{1, 3\}$, $A \setminus C = \{1, 2, 3, 4\} = A$.

Вопрос: каким операциям соответствует следующая диаграмма?



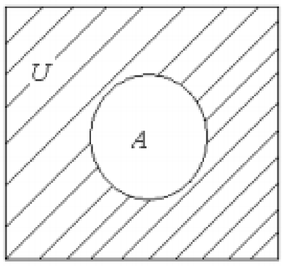
Ответ: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, операция называется симметричной разностью множеств. Причем $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cup A)$. Доказательство этого соотношения, как и любых других утверждений о равенстве множеств, состоит в том, чтобы предположив принадлежность некоторого элемента x множеству из левой части равенства, необходимо доказать, что этот же самый элемент принадлежит множеству, стоящему в правой части равенства и наоборот.

Задание: доказать равенство $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cup A)$.

Определение 4. Если A – подмножество множества U, то *дополнением* множества A до множества U есть множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов U, которые не принадлежат A, т.е.

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

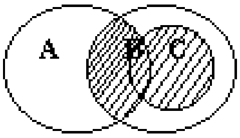
На кругах Эйлера дополнение изображается в виде заштрихованной области.

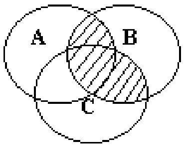


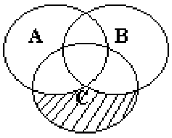
Задание:

<u>Вариант 1</u>

1. Приняв множество первых 33 натуральных чисел в качестве универсального множества U, запишите его и его подмножества: A – четных чисел; B – нечетных чисел; C – квадратов чисел; D – простых чисел; и запишите множества, которые получатся в результате следующих операций:
   $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $A\cap C$; 4) $A\cap D$; 5) $C – A$; 6) $C – B$; 7) $C+D$;
2. Дано универсальное множество $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h,k\}$ и его подмножества $A=\{a,b,c,f\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$, $C=\{h,k\}$. Найти: а) $\overline{A}\bigcup\overline{B}$; б) $A\bigcap\overline{B}$; в) $(B\setminus A)\bigcup\overline{C}$.
3. Представить множества диаграммами Эйлера–Венна
   а) $A\bigcup\left(B\bigcap\overline{C}\right)$;б) $(A\bigcap B)\bigcup(B\bigcap C)\bigcup(A\bigcap C)$;в) $A\setminus\overline{B\bigcup C}$.
4. Множества A, B, C представленные кругами Эйлера. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответственно заштрихованным областям:

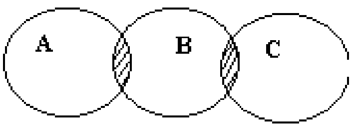


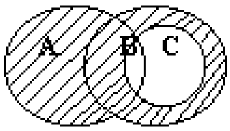
, b) 

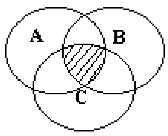
, c) 

<u>Вариант 2</u>

1. Приняв множество букв русского языка в качестве универсального множества U, запишите его и его подмножества: A – гласные буквы(10); B – согласные буквы(22); C – согласные звуки, имеющие пару(12); D – буквы не имеющие звука(2); и запишите множества, которые получатся в результате следующих операций:
   1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $B\cap C$; 4) $U\cap D$; 5) $C – A$; 6) $B – C$; 7) $C+D$;
2. Дано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и его подмножества $A=\{1,3,4\}$, $B=\{2,3,5,7\}$, $C=\{1,4,7,8,9\}$. Найти: а) $\overline{A}\bigcup\overline{B}$; б) $A\bigcap\overline{B}$; в) $(B\setminus A)\bigcup\overline{C}$.
3. Представить множества диаграммами Эйлера–Венна
   а) $A\bigcap(B\setminus C)$;б) $((A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B))\bigcap C$;в) $A+\overline{B\bigcap C}$.
4. Множества A, B, C представленные кругами Эйлера. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответственно заштрихованным областям:

а) 

, b) 

, c) 

Практическое занятие № 14

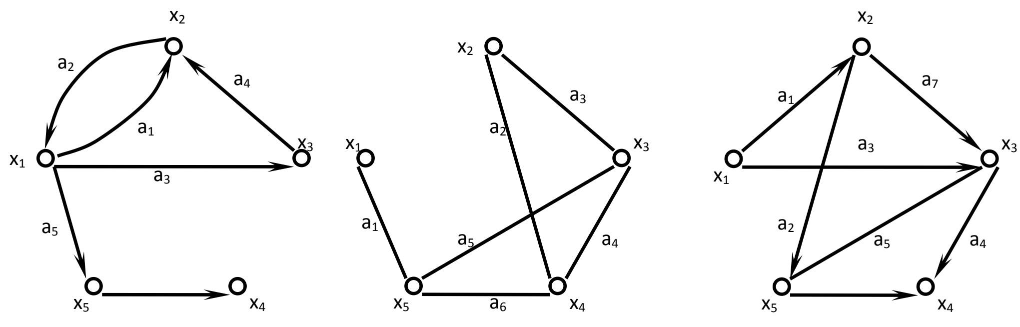
Построение графа по условию ситуационных задач

Цель: Научиться строить графы

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

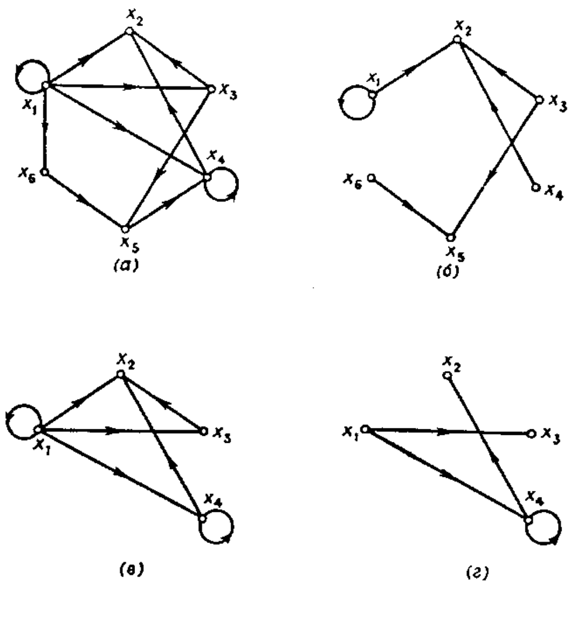
Краткие теоретические сведения

Граф *G* задается множеством точек или *вершин* $x_1, x_г, . . ., x_n$(которое обозначается через *X)* и множеством линий или *ребер* $a_1, a_2, . . ., a_m$(которое обозначается символом *A),* соединяющих между собой все или часть этих точек. Таким образом, граф *G*полностью задается (и обозначается) парой *(X, A).*
Если ребра из множества*A*ориентированы, что обычно показывается стрелкой, то они называются *дугами,* и граф с такими ребрами называется *ориентированным* графом. Если ребра не имеют ориентации, то граф называется *неориентированным*



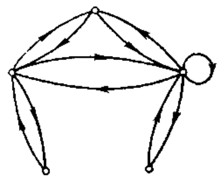
(а) **(б)** **(в)**

Пусть дан граф *G=(X, A). Остовным подграфом* G_pграфа *G*называется граф *(X,* A_p*),* для которого $A_p \subset A$. Таким образом, остовный подграф имеет то же самое множество вершин, что и граф *G,* но множество дуг подграфа G_pявляется подмножеством множества дуг исходного графа.

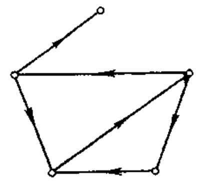


Типы графов

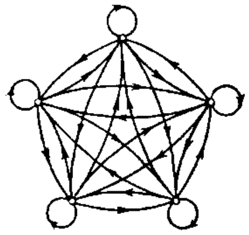
Граф $G=(X,A)$ называют *полным,* если для любой пары вершин x_i и x_j в Xсуществует ребро $\overline{(x_i,x_j)}$ в $\overline{G}=(X,\overline{A})$, т. е. для каждой пары вершин графа G должна существовать по крайней мере одна дуга, соединяющая их. Полный неориентированный граф, построенный на nвершинах, обозначается через K_n.



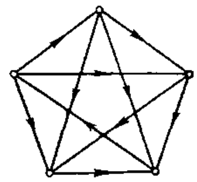
(а)



(б)



(в)



(г)

Пусть дан граф G, его *матрица смежности* обозначается через $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ и определяется следующим образом:

$a_{ij}=1$, если в Gсуществует дуга (x_i,x_j),

$a_{ij}=0$ если в Gнет дуги (x_i,x_j).

Таким образом, матрица смежности графа, изображенного на рис. имеет вид

$$A=\begin{array}{c|cccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Например, сумма всех элементов строки x_i матрицы дает полустепень исхода вершины x_i, а сумма элементов столбца x_i— полустепень захода вершины x_i. Множество столбцов, имеющих 1 в строке x_i,. есть множество $\Gamma(x_i)$, а множество строк, которые имеют 1 столбце x_i, совпадает с множеством $\Gamma^{-1}(x_i)$.

Пусть дан граф Gс nвершинами и m дугами. *Матрица инциденций*графа Gобозначается через $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$и является матрицей размерности $n\times m$, определяемой следующим образом:

$b_{ij}=1$, если x_iявляется начальной вершиной дуги a_i,

$b_{ij}=-1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_i,

$b_{ij}=0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_i или если a_j является петлей.

Для графа, приведенного на рис., матрица инциденций имеет вид

$$B = \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_{91} & a_{10} \\ \cline{2-11}
x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
x_2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{2-11}
\end{array}$$

Поскольку каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один – равный -1, либо все элементы столбца равны 0.

Если *G*является неориентированным графом, то его матрица инциденций определяется так же, как и выше, за исключением того, что все элементы, равные —1, заменяются на +1.

Задание:

<u>Вариант 1</u>

1. Представить в виде ориентированного графа отношение
ρ = (V, E), V = {2, 4, 16, 22}, E = {(x, y) : x / y – четно}.
2. Ориентированный граф G с множеством вершин V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} задан списком дуг
{(1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (5, 1), (5, 6), (5, 6), (5, 6), (7, 4), (7, 6)}.
Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.
3. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Неориентированный граф G задан вершинами {1,2,3,4,5,6,7} и рёбрами {(1,3); (1,4); (1,5); (1,7); (2,3); (2,4); (2,7);(3,5); (3,7); (4,6); (4,7); (5,6); (6,7)}. Построить реализацию графа, найти его остов.

<u>Вариант 2</u>

1. Представить в виде ориентированного графа отношение
ρ = (V, E),V = {2, 4, 16, 22}, E = {(x, y) : (x + y) / 6}.
2. Ориентированный граф G с множеством вершин V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} задан списком дуг
{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 5),(5, 7), (7, 1)}.
Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.
3. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Неориентированный граф с множеством вершин {1,2,3,4,5,6,7} и ребрами {(1,4), (1,6), (2,1), (2,2), (2,6),(3,2), (3,4), (3,6), (4,6),(5,2), (5,4), (5,5), (6,2), (6,5), (7,1), (7,6)}. Построить реализацию графа, найти его остов.

Практическое занятие № 15

Решение комбинаторных задач

Цель: Закрепить умение решать комбинаторные задачи

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Методы решения комбинаторных задач

Перебор возможных вариантов

Простые задачи решают обыкновенным полным перебором возможных вариантов без составления различных таблиц и схем.

Задача

Какие двузначные числа можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Ответ: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 55.

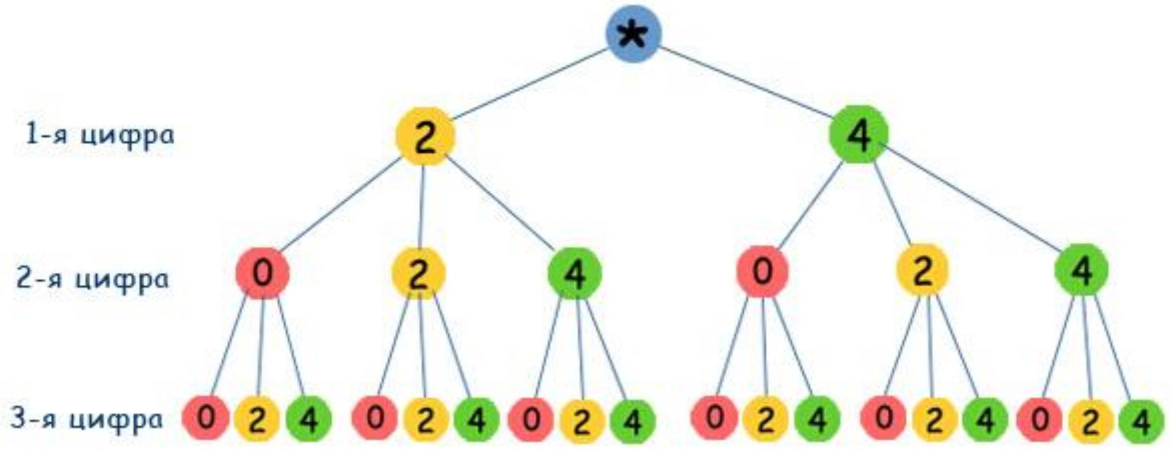
Дерево возможных вариантов

Самые разные комбинаторные задачи решаются с помощью составления специальных схем. Внешне такая схема напоминает дерево, отсюда и название метода - **дерево возможных вариантов.**

Задача

Какие трехзначные числа можно составить из цифр 0, 2, 4?

Решение. Построим дерево возможных вариантов, учитывая, что 0 не может быть первой цифрой в числе.



Ответ: 200, 202, 204, 220, 222, 224, 240, 242, 244, 400, 402, 404, 420, 422, 424, 440, 442, 444.

Составление таблиц

Решить комбинаторные задачи можно с помощью таблиц. Они, как и дерево возможных вариантов, наглядно представляют решение таких задач.

Задача

Сколько нечетных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9?

Решение. Составим таблицу: слева первый столбец - первые цифры искомых чисел, вверху первая строка - вторые цифры.

	1	3	7	9
1	11	13	17	19
3	31	33	37	39
4	41	43	47	49
6	61	63	67	69
7	71	73	77	79
8	81	83	87	89
9	91	93	97	99

Ответ: 28.

Правило умножения

Этот метод решения комбинаторных задач применяется, когда не требуется перечислять все возможные варианты, а нужно ответить на вопрос - сколько их существует.

Задача

В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они для трусов и футболок использовали белый, красный, синий и зеленый цвета, причем были представлены все возможные варианты. Сколько команд участвовали в турнире?

Решение.

Трусы могут быть белого, красного, синего или зеленого цвета, т.е. существует 4 варианта. Каждый из этих вариантов имеет 4 варианта цвета майки.

4 x 4 = 16.

Ответ: 16 команд.

С помощью основных формул комбинаторики

Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n=n!$.

Число размещений в комбинаторике обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Задание:

1. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 8, 9 и 0? (составьте дерево возможных вариантов)
2. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2 и 3? (составьте дерево возможных вариантов)
3. Сосчитайте все двузначные числа, в записи которых используются только цифры 3, 5, 7 и 9.
   - Сколько их с повторениями?
   - Сколько их, если цифры в числе не могут повторяться?
4. Сколькими способами можно прочитать слово «квадрат»?

к
в в
а а а
д д д д
р р р р р
а а а а а а
т т т т т т т

5. Вычислите: $5!$ $\frac{5!-4!}{3!}$ A_5^3 $\frac{P_2+P_3}{P_4}$ C_8^3
6. Возведите в степень: $(a-b)^6$ $(3+x)^4$
7. Сколько вариантов распределения мест в соревнованиях возможно между пятью спортсменами?
8. Сколькими способами между пятью спортсменами можно распределить «золотую», «серебряную» и «бронзовую» медали?
9. Сколькими способами из пяти спортсменов можно отобрать трёх для участия в соревновании?

Вариант 2

1. В алфавите племени «АБ» имеются только 2 буквы «а» и «б». Сколько различных трёхбуквенных слов можно составить, используя этот алфавит? 9составьте дерево возможных вариантов)
2. Запишите все двузначные числа, состоящие из цифр 9, 1 и 0
   - Сколько их с повторениями?
   - Сколько их без повторений цифр?
3. Сколькими способами можно прочитать слово «строка»?

строка
трока
рока
ока
ка
а

4. Вычислите: A_8^3 $\frac{6!+2!+4}{3!}$ $\frac{P_4-P_3}{P_2}$ C_5^3
5. Возведите в степень: $(a-b)^4$ $(x+2)^5$
6. Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, зелёный и коричневый переплёты. Сколькими способами он может это сделать?
7. Сколько вариантов распределения трёх путёвок в разные санатории для семи претендентов возможно?
8. Сколько вариантов распределения трёх путёвок в один санаторий для семи претендентов возможно?
9. Сколько существует пятизначных симметричных чисел, которые одинаково читаются слева-направо и справа-налево?

Практическое занятие № 16

Решение задач на определение вероятности события.

Цель: Закрепить умения находить вероятность событий

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности, т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение.Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение.Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Исходя из этих общих понятий, можно дать определение вероятности.

Определение.Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

<u>Пример.</u> В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$p(A) = \frac{3}{10}; \quad p(B) = \frac{2}{10}; \quad p(C) = \frac{5}{10}$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

<u>Определение.</u>Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Вообще говоря, классическое определение вероятности – довольно относительное. Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

К примеру, при проведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д.

Задание:

Вариант 1

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
2. В цехе работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы 2 шара оказались белыми, а один черным?
4. Отдел технического контроля обнаружил 15 бракованных ламп в партии из случайно отобранных 200 ламп. Найти относительную частоту появления бракованных ламп.
5. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.

Вариант 2

1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.
2. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.
3. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?
4. По цели произведено 40 выстрелов, причем зарегистрировано 37 попаданий. Найти относительную частоту промахов.
5. При испытании партии телевизоров относительная частота бракованных телевизоров оказалась равной 0,15. найти число качественных телевизоров, если было проверено 400 телевизоров.

Вариант 3

1. В ящике 100 деталей, из них 18 бракованных. Наудачу извлечены4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.
2. На складе имеется 25 кинескопов, причем 15 из них изготовлены Минским заводом. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу кинескопов окажутся 4 кинескопа Минского завода.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы один шар оказался белыми, а два черным?
4. По цели произведено 30 выстрелов, причем зарегистрировано 28 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.
5. При проверке качества электрических лампочек оказалось, что относительная частота бракованных лампочек равна 0,2. Найти число качественных электрических лампочек, если всего было проверено 600 лампочек.

Вариант 4

1. Устройство состоит из 15 элементов, из которых 4 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 3 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
2. В группе 28 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.
3. В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 - стандартные.
4. Отдел технического контроля обнаружил 25 бракованных деталей в партии из случайно отобранных 300 деталей. Найти относительную частоту появления стандартных деталей.
5. При проверке учебников относительная частота качественных учебников оказалась равной 0,85. найти число бракованных книг, если всего было проверено 400 учебников.

Практическое занятие № 17

Решение задач на применение теорем о вероятности суммы и произведения событий.

Цель: Закрепить умения находить вероятность событий с помощью теорем суммы и произведения вероятностей событий

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий *А и В* называется событие **С**, состоящее в появлении хотя бы одного из событий **А** или **В**.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P\ (A + B) = P\ (A) + P\ (B)}.$$

В случае, когда события **А** и **В** совместны, вер-ть их суммы выражается формулой

$$\mathbf{P\ (A + B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (AB)},$$

где **АВ** – произведение событий **А** и **В**.

Два события называются **зависимыми**, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. в случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

Условной вероятностью P(A/B) события **А** называется вероятность события **А**, вычисленная при условии, что событие **В** произошло. Аналогично через **Р(В/А)** обозначается условная вероятность события **В** при условии, что событие **А** наступило.

Произведением двух событий *А и В* называется событие **С**, состоящее в совместном появлении события **А** и события **В**.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна вер-ти одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

$$\mathbf{P\ (AB) = P(A) \cdot P(B/A)}, \text{ или } \mathbf{P\ (AB) = P(B) \cdot P(A/B)}.$$

Следствие. Вероятность совместного наступления двух независимых событий **А** и **В** равна произведению вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P\ (AB) = P(A) \cdot P(B).}$$

Следствие. При производимых **n** одинаковых независимых испытаниях, в каждом из которых события **А** появляется с вероятностью **р**, вероятность появления события **А** хотя бы один раз равна $\mathbf{1 - (1 - p)^n}$

Задание:

Вариант 1

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст только второй экзамен.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.
3. У сборщика имеется 5 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял последовательно 2 валика. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй эллиптический.
4. Слово *арифметика* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.
5. Имеется три ящика, содержащих по 12 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Вариант 2

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,6; третий – 0,7. найти вероятность того, что студент сдаст три экзамена.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,75. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.
3. В урне 10 красных шаров и 5 белых. Из урны последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что первый из взятых шаров – белый, а второй – красный.
4. Слово *программист* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.
5. В трех коробках лежат книги: в первой – 10(из них 3 словаря), во второй – 15(из них 5 словарей) и в третьей – 8(из них 5 словарей). Из каждой коробки наудачу вынимают по одной книге. Найти вероятность того, что все три книги окажутся словарями.

Вариант 3

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,5; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст только один экзамен.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.
3. В ящике находятся 5 окрашенных деталей и 7 обычных. Сборщик взял последовательно 2 детали. Найти вероятность того, что первая из взятых деталей – окрашенная, а вторая обычная.
4. Слово *статистика* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.
5. В двух ящиках находятся детали: в первом -10(из них 3 стандартных),во втором – 15(из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Вариант 4

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,7; второй – 0,6; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,65. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.
3. У сборщика имеется 10 конусных и 5 эллиптических валиков. Сборщик взял последовательно 2 валика. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй эллиптический.
4. Слово *вероятность* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.
5. Имеется 3 урны по 12 шаров в каждой. В первой урне 10, во второй 8 и в третьей 9 шаров белого цвета. Из каждой урны наудачу вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что все три шара окажутся белыми.

Практическое занятие № 18

Построение ряда распределения случайной величины

Цель: Закрепить умение построения закона распределения случайной дискретной величины

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

1 Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

2 Дискретной случайной величиной (ДСВ) называют такую величину, множество значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.

3 Заданное соответствие между возможными значениями СВ и их вероятностями называется законом распределения случайной величины ; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

4 При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности. Эта таблица называется рядом распределения.

5 Ряд распределения можно представить графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения ДСВ, а по оси ординат - соответствующие вероятности. Соединив полученные точки отрезками, получим ломаную, называемую много- угольником распределения вероятностей

6 Функцией распределения случайной величины X (обозначается F(x)) называется функция, определяемая соотношением F(x) = P(X < x).

7 Математическое ожидание ДСВ X равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е. $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$

8 Дисперсией ДСВ X (D(X)) называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания, т.е. $D(X)=M(X-M(X))^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 P(x_i)$

9 Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется арифметический корень из дисперсии, т.е. $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Пример выполнения:

Исходные данные:

Приживаемость саженцев яблонь составляет 80%. Наудачу выбирают 5 саженцев. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев, функцию распределения, построить многоугольник распределения и график функции распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа прижившихся саженцев.

Решение:

1 Вероятность приживаемости яблони равна 0,8.

X – случайная величина числа прижившихся яблонь из пяти саженцев:

Возможные значения: $x1 = 0$ – ни один саженец не прижился;

$x2 = 1$ – один саженец прижился;

$x3 = 2$ – два прижились;

$x4 = 3$ – три;

$x5 = 4$ – четыре;

$x6 = 5$ – пять саженцев прижились.

2 Вероятности этих значений вычислим по формуле Бернулли:

$$P(x_1) = C_5^0 p^0 q^5 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}(0{,}8)^0(0{,}2)^5 = 0{,}00032$$

$$P(x_2) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}(0{,}8)^1(0{,}2)^4 = 5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}0016 = 0{,}0064$$

$$P(x_3) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}(0{,}8)^2(0{,}2)^3 = 10\cdot 0{,}64\cdot 0{,}008 = 0{,}0512$$

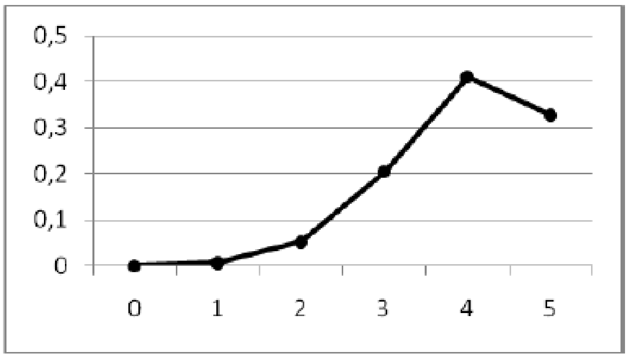
$$P(x_4) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}(0{,}8)^3(0{,}2)^2 = 10\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04 = 0{,}2048$$

$$P(x_5) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}(0{,}8)^4(0{,}2)^1 = 5\cdot 0{,}4096\cdot 0{,}2 = 0{,}4096 \quad P(x_6) = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}(0{,}8)^5(0{,}2)^0 = 0{,}32768$$

Таким образом, закон распределения случайной величины:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Многоугольник распределения:



Вычислим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases} 0; \quad \textit{если}\ x\le 0 \\ 0{,}00032; \quad \textit{если}\ 0<x\le 1 \\ 0{,}00032+0{,}0064=0{,}00672; \quad \textit{если}\ 1\le x<2 \\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512=0{,}05792; \quad \textit{если}\ 2\le x<3 \\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048=0{,}26272; \quad \textit{если}\ 3\le x<4 \\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048+0{,}4096=0{,}67232; \quad \textit{если}\ 4\le x<5 \\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048+0{,}4096+0{,}32768=1; \quad \textit{если}\ x\ge 5 \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики случайной величины, для этого составим таблицу:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768
X-M(X)	-4	-3	-2	-1	0	1
$(X\text{-}M(X))^2$	16	9	4	1	0	1

Мат. ожидание: $M(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i P(x_i)=$

$$=1\cdot 0{,}0064+2\cdot 0{,}0512+3\cdot 0{,}2048+4\cdot 0{,}4096+5\cdot 0{,}32768=4$$

Дисперсия: $D(X)=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^2 P(x_i)=$

$$=16\cdot 0.00032+9\cdot 0{,}0064+4\cdot 0{,}0512+1\cdot 0{,}2048+0\cdot 0{,}4096+1\cdot 0{,}32768=0{,}8$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}89$

Задания:

1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

3. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелок делает выстрелы до первого промаха. Составить закон распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку, если всего имеется пять патронов. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

4. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа гербов при четырех подбрасываниях монеты. Построить полигон полученного распределения.

5. Два носка выбираются случайным образом из ящика, в котором находится 5 коричневых и 3 зеленых. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа коричневых носков. Построить полигон полученного распределения.

6. В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных однотипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

7. В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных однотипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества кондиционных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

8. В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества дефектных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

9. В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества качественных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

10. В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

11. В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар имеется в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

12. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых белых шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

13. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

14. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

15. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

16. Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

17. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества качественных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

18. Дискретная случайная величина – число мальчиков в семьях с 5 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и

среднее квадратическое отклонение количества мальчиков. Построить полигон полученного распределения.

19. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

20. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго – 0,4. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

21. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

22. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу не красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

23. Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Построить полигон полученного распределения.

24. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

25. В коробке имеются 10 карандашей, из которых 4 синие. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу синих карандашей. Построить полигон полученного распределения.

26. Дискретная случайная величина – число девочек в семьях с 4 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества девочек. Построить полигон полученного распределения.

27. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,6, для второго – 0,7. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

28. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,8 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

29 Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

30 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попада-ний мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

31 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попада-ний мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,7. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

Практическое занятие № 19

Нахождение математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины

Цель: Закрепить умение нахождения числовых характеристик случайной дискретной величины

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Алгоритм вычисления математического ожидания
Свойства дискретных случайных величин: все их значения можно перенумеровать натуральными числами; каждому значению сопоставить отличную от нуля вероятность.

1. Поочередно умножаем пары: x_i на p_i.
2. Складываем произведение каждой пары x_ip_i. Например, для n = 4: $m = \sum x_ip_i = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$

Функция распределения дискретной случайной величины ступенчатая, она возрастает скачком в тех точках, вероятности которых положительны.
ПРИМЕР

x_i	1	3	4	7	9
p_i	0.1	0.2	0.1	0.3	0.3

Математическое ожидание находим по формуле $m = \sum x_ip_i$.
Математическое ожидание M[X].
$M[x] = 1*0.1 + 3*0.2 + 4*0.1 + 7*0.3 + 9*0.3 = 5.9$
Дисперсию находим по формуле $d = \sum x^2_ip_i - M[x]^2$.
Дисперсия D[X].
$D[X] = 1^2*0.1 + 3^2*0.2 + 4^2*0.1 + 7^2*0.3 + 9^2*0.3 - 5.9^2 = 7.69$
Среднее квадратическое отклонение σ(x).
$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7.69} = 2.78$

Задание:

1. Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	10	20	30	40	50	60	70
$P(X)$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,15	0,10

Построить ломанную распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$

2. Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	4	6	8	10	12	14	16
$P(X)$	0,07	0,13	0,15	0,20	0,22	0,13	0,10

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины.

3. Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	24	26	28	30	32	34
$P(X)$	0,12	0,18	0,20	0,20	0,15	0,15

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины

4. Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	4	6	8	10	12	14	16
$P(X)$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,15	0,10

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины

5. Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	6	8	10	12	14	16
$P(X)$	0,10	0,18	0,22	0,25	0,15	0,10

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины

6. Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	60	140	160	180	200	220	240
$P(X)$	0,10	0,10	0,15	0,15	0,20	0,20	0,10

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины

7. Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	120	140	160	180	200	220	240
$P(X)$	0,10	0,10	0,15	0,15	0,20	0,20	0,10

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины

8. Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	-5,5	-4,0	-2,5	-1,0	0,5	2,0	3,5
$P(X)$	0,10	0,12	0,18	0,15	0,20	0,15	0,10

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины

9.	Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	140	160	180	200	220
$P(X)$	0,20	0,30	0,20	0,20	0,10

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины

10.	Случайная величина X подчиняется следующему закону распределения:

X	-5	-2	1	4	7	9
$P(X)$	0,15	0,25	0,30	0,15	0,10	0,05

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины

Практическое занятие № 20

Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона

Цель: Научиться применять формулы прямоугольников, трапеций и парабол при вычислении площади криволинейной трапеции

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

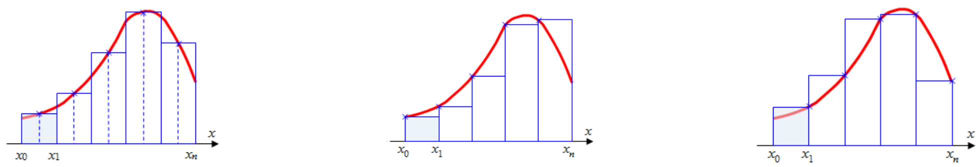
Метод прямоугольников

Одним из простейших методов численного интегрирования является **метод прямоугольников**. На частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ подынтегральную функцию заменяют полиномом Лагранжа нулевого порядка, построенным в одной точке. В качестве этой точки можно выбрать середину частичного отрезка $x_{j-0.5} = x_j - 0.5h$. Тогда значение интеграла на частичном отрезке: $\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cdot dx \approx f(x_{j-0.5}) \cdot h$ Подставив это выражениеполучим составную формулу **средних прямоугольников**: $\int\limits_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum\limits_{j=1}^{N} f(x_{j-0.5}) \cdot h$ Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рис.(а). Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из *N* прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы *N* элементарных прямоугольников.

Формулу (2.7) можно представить в ином виде:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum\limits_{j=1}^{N} h \cdot f(x_{j-1}) \quad \text{или} \quad \int\limits_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum\limits_{j=1}^{N} h \cdot f(x_j)$$

Эти формулы называются формулой **левых и правых прямоугольников** соответственно. Графически метод левых и правых прямоугольников представлен на рис (б, в). Однако из-за нарушения симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, их погрешность значительно больше, чем в методе средних прямоугольников.



а) средние прямоугольники б) левые прямоугольники в) правые прямоугольники

Рис. Интегрирование методом прямоугольников

Метод трапеций

Если на частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ подынтегральную функцию заменить полиномом Лагранжа первой степени:

$$f(x) = L_{1,j}(x) = \frac{1}{h}\left[\left(x - x_{j-1}\right)f(x_j) - \left(x - x_j\right)f(x_{j-1})\right]$$ то искомый интеграл на частичном отрезке запишется следующим образом:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{1}{h}\left[f(x_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x - x_{j-1}\right)dx - f(x_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x - x_j\right)dx\right] = \frac{f\left(x_{j-1}\right) + f\left(x_j\right)}{2}h$$

Тогда составная формула трапеций на всем отрезке интегрирования $[a,b]$ примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N}\frac{f\left(x_j\right) + f\left(x_{j-1}\right)}{2}h = h\left[\frac{1}{2}(f_1 + f_N) + f_2 + \ldots + f_{N-1}\right]$$ Графически метод трапеций представлен на рис. Площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из Nтрапеций, при этом кривая заменяется вписанной в нее ломаной. На каждом из частичных отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные значения, при этом площадь трапеции на каждом отрезке определяется по формуле

Погрешность метода трапеций выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удается далеко не всегда.

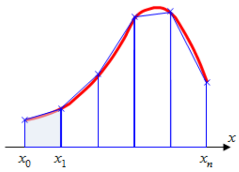


Рис. Интегрирование методом трапеций

Метод Симпсона

В этом методе подынтегральная функция на частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ аппроксимируется параболой, проходящей через три точки x_{j-1}, $x_{j-0.5}$, x_j, то есть интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени:

$$f(x) = L_{2,j}(x) = \frac{2}{h^2}\left[\left(x - x_{j-0.5}\right)\left(x - x_j\right)f(x_{j-1}) -\right.$$

$$\left.- 2\cdot\left(x - x_{j-1}\right)\left(x - x_j\right)f(x_{j-0.5}) + \left(x - x_{j-1}\right)\left(x - x_{j-0.5}\right)f(x_j)\right]$$ Проведя интегрирование, получим:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f_{j-1} + 4f_{j-0.5} + f_j\right)$$

Это и есть формула Симпсона или формула парабол. На отрезке $[a,b]$ формула Симпсона примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[f_0 + f_N + 2\left(f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-1}\right) + 4\left(f_{0.5} + f_{1.5} + f_{2.5} + \ldots + f_{N-0.5}\right)\right] =$$

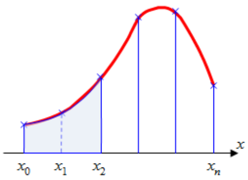
$$= \frac{h}{6}\left[f_0 + f_N + 2\cdot\sum_{j=1}^{N-1} f_j + 4\cdot\sum_{j=0.5}^{N-0.5} f_j\right]$$

Если разбить отрезок интегрирования $[a,b]$ на **четное** количество $2N$ равных частей с шагом $h = \dfrac{b-a}{2N}$, то можно построить параболу на каждом сдвоенном частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ и переписать выражения без дробных индексов. Тогда формула Симпсона примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + f_5 + ..\right.$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2N} + 2\cdot\sum_{j=2,2}^{2N-2} f_j + 4\cdot\sum_{j=1,2}^{2N-1} f_j\right]$$

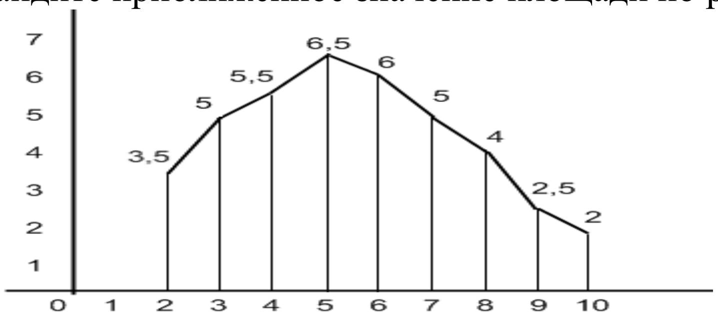
Графическое представление метода Симпсона показано на рис. На каждом из сдвоенных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой параболой. *Рис. Метод Симпсона*



Задание:

1 вариант

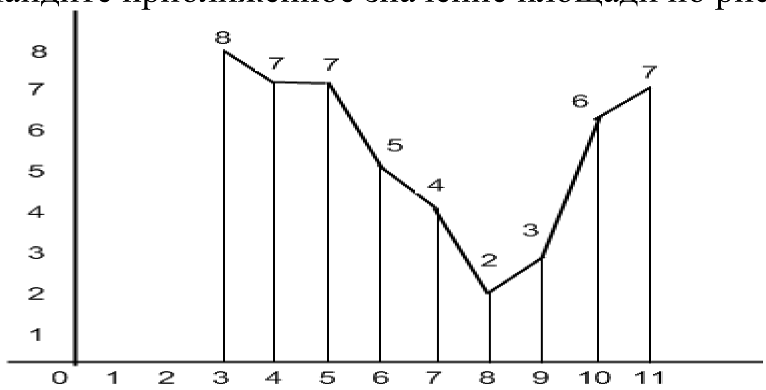
1. Найдите приближённое значение площади по рисунку:



2. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_1^7 x^5 dx$, разбив его на 6 частей.
3. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_1^{2.2} \frac{dx}{1+x^2}$, разбив его на 6 частей.

2 вариант

1. Найдите приближённое значение площади по рисунку:



2. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_1^9 x^2 dx$, разбив его на 8 частей.
3. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_1^5 \frac{2dx}{\sqrt{x}}$, разбив его на 4 части.

Перечень рекомендуемой учебной литературы, информационных ресурсов сети Интернет соответствует пункту 3.2. рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01. Математика специальности 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)