ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора АлександраI»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Петрозаводский филиал ПГУПС

ОДОБРЕНО
на заседании цикловой комиссии ЕН
протокол № 8 от 28 апреля 2017 г.
Председатель цикловой комиссии:
Михайлова Т.А. (______)

УТВЕРЖДАЮ
Начальник УМО
________ А.В. Калько
«28» 04 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению практических занятий

По учебной дисциплине: ЕН.01. Прикладная математика

Специальность: 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство

Разработчики:
Писаренко А.С.
Пуолакайнен Л.М.

2017 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации и проведению практических занятий разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01. Прикладная математика и предназначено для выполнения практических занятий обучающимися.

Практические занятия по учебной дисциплине направлены на усвоение знаний, освоение умений и формирование элементов общих и профессиональных компетенций, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

уметь:

применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;

применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;

использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;

знать:

основы понятия и методы математического синтеза и анализа логических устройств;

способы решения прикладных задач методом комплексных чисел.

В результате освоения учебной дисциплины происходит поэтапное формирование элементов общих и профессиональных компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития

ПК 1.1.Выполнять различные виды геодезических съемок.

ПК 1.2. Обрабатывать материалы геодезических съемок.

ПК 3.1. Обеспечивать выполнение требований к основным элементам и конструкции земляного полотна, переездов, путевых и сигнальных знаков, верхнего строения пути.

ПК 3.4. Эксплуатировать средства диагностики железнодорожного пути и сооружений.

ПК 4.1. Планировать работу структурного подразделения при технической эксплуатации, обслуживании и ремонте пути, искусственных сооружений**.**

Рабочей программой предусмотрено выполнение обучающимися практических занятий, включая, как обязательный компонент практические задания с использованием персонального компьютера.

Распределение результатов освоения учебного материала в ходе выполнения заданий на практических занятиях происходит в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Распределение результатов освоения учебного материала

Раздел, тема	**Контрольно-оценочные мероприятия**	**Результаты**		**Поэтапно формируемые элементы общих и профессиональных компетенций**
		усвоенные знания	**освоенные умения**	
Тема 1.1 Комплексные числа	Практическое занятия 1 Комплексные числа и действия над ними.	способы решения прикладных задач методом комплексных чисел;	использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;	ОК 2. ОК 3.
Раздел 2.Основы дискретной математики				
Тема 2.1. Теория множеств	Практическое занятие 2 Построение графа по заданным матрицам смежности и инцидентности; построение матриц по графу.	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;	ОК 2. ОК 3. ОК 4.
Раздел 3.Дифференциальное и интегральное исчисление				
Тема 3.1. Дифференциальное исчисление	Практическое занятия 3 Производная функция и ее приложение для вычисления геометрических, механических и физических величин при решении профессиональных задач.	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	применять математические методы дифференциального и интегрального исчислений для решения профессиональных задач;	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ПК 1.1. ПК 1.2. ПК 3.1. ПК 4.1.
Тема 3.2. Интегральное исчисление	Практическое занятия 4 Вычисление геометрических, механических и физических величин с помощью интегрального исчисления при решении профессиональных	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	применять математические методы дифференциального и интегрального исчислений для решения профессиональных	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ПК 3.1. ПК 4.1.

	задач.		задач;	
Раздел 4. Дифференциальные уравнения				
Тема 4.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	Практическое занятие 5 Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	применять математические методы дифференциального и интегрального исчислений для решения профессиональных задач;	ОК 2. ОК 3. ОК 4.
Тема 4.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	Практическое занятие 6 Решение однородных дифференциальных уравнений	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	применять математические методы дифференциального и интегрального исчислений для решения профессиональных задач;	ОК 2. ОК 3. ОК 4.
Тема 4.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	Практическое занятие 7 Нахождение частные решений дифференциальных уравнений по заданным условиям	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	применять математические методы дифференциального и интегрального исчислений для решения профессиональных задач;	ОК 2. ОК 3. ОК 4.
Тема 4.4. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Частные решения дифференциальных уравнений.	Практическое занятие 8 Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	применять математические методы дифференциального и интегрального исчислений для решения профессиональных задач;	ОК 2. ОК 3. ОК 4.
Раздел 5.Ряды				
Тема 5.2. Степенные ряды Маклорена	Практическое занятие 9 Решение задач на определение сходимости числовых рядов по известным признакам.	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;	ОК 2. ОК 3. ОК 4.
Раздел 6 Основы теории вероятностей и математической статистики				
Тема 6.1 Комбинаторика	Практическое занятие 10 Решение задач по комбинаторике	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ПК 1.1. ПК 1.2. ПК 3.1. ПК 4.1.
Тема 6.3 Математическая статистика	Практическое занятие 11 Решение задач по теории вероятностей и математической	основные понятия и методы математически-логического синтеза и	применять основные положения теории вероятностей и	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ПК 1.1.

	статистике	анализа логических устройств;	математической статистики в профессиональной деятельности;	ПК 1.2. ПК 3.1. ПК 3.4. ПК 4.1.
Раздел 7. Численные методы				
Тема 7.3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	Практическое занятие 12 Применение численных методов при интегрировании, дифференцировании, решении дифф. уравнений	основные понятия и методы математически-логического синтеза и анализа логических устройств;	применять математические методы дифференциального и интегрального исчислений для решения профессиональных задач;	ОК 2. ОК 3. ОК 4.

Содержание практических занятий охватывает весь круг умений и компетенций, на формирование которых направлена учебная дисциплина.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1

Комплексные числа и действия над ними.

Практическое занятие №2

Построение графа по заданным матрицам смежности и инцидентности; построение матриц по графу.

Практическое занятие №3

Производная функция и ее приложение для вычисления геометрических, механических и физических величин при решении профессиональных задач.

Практическое занятие №4

Вычисление геометрических, механических и физических величин с помощью интегрального исчисления при решении профессиональных задач.

Практическое занятие №5

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Практическое занятие №6

Решение однородных дифференциальных уравнений

Практическое занятие №7

Нахождение частные решений дифференциальных уравнений по заданным условиям

Практическое занятие №8

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Практическое занятие №9

Решение задач на определение сходимости числовых рядов по известным признакам.

Практическое занятие №10

Решение задач по комбинаторике

Практическое занятие №11

Решение задач по теории вероятностей и математической статистике

Практическое занятие №12

Применение численных методов при интегрировании, дифференцировании, решении дифференциальных уравнений

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

При оценке освоенных умений при выполнении практических работ применяется пятибалльная шкала оценивания.

Оценивание практических занятий производится в соответствии со следующими нормативными актами:

- Положение о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;
- Положение о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий.

Практическое занятие №1

Комплексные числа и действия над ними.

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами в различных формах записи.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

1.1. Алгебраическая форма комплексных чисел

Комплексными числами называются выражения вида $a+bi$, (где a и bдействительные числа, а i- символ, удовлетворяющий условию $i^2=-1$).Для комплексных чисел равенство, сложение и умножение определяются следующим образом:

а) суммой двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ (1.1),

в) произведением двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число

$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ (1.2).

Пример. 1.1. Вычислить сумму и произведение двух комплексных чисел: $z_1=2+3i;\ z_2=4-2i$

Решение.

$z_1+z_2=(2+4)+(3-2)i=6+i;$

$z_1\cdot z_2=(2+3i)\cdot(4-2i)=2\cdot4-2\cdot2\cdot i+3\cdot4\cdot i-3\cdot2\cdot i\cdot i=8-4i+12i+6=14+8i$

Разность **двух комплексных чисел** – операция обратная сложению и может быть выполнена по формуле: $(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$ (1.3).

Пример 1.2. Вычислить разность двух комплексных чисел: $z_1=-4+2i;\ z_2=3-i$

Решение $z_1-z_2=(-4-3)+(2-(-1))i;=-7+3i$

Число $\bar{z}=a-bi$ называется ***комплексно-сопряженным с комплексным числом*** $z=a+bi$. Понятие комплексной сопряженности взаимно.

Для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое, надо записать их в виде дроби, в числителе которой – делимое, а в знаменателе – делитель, а затем числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное со знаменателем.

Пример 1.3.Вычислить частное от деления комплексного числа $z_1=14+8i$ на комплексное число $z_2=4-2i$

Решение $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(14+8i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{56+28i+32i-16}{4^2+2^2}=\frac{40+60i}{20}=2+3i$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда $a=b=0$**.**

Операция возведения в степень комплексного числа рассматривается как частный случай произведения одного и того же сомножителя.

Степени мнимой единицы даются формулой

$$i^n=\begin{cases} i, & если\ n=4k+1,\\ -1, & если\ n=4k+2,\\ -i, & если\ n=4k+3,\\ 1, & если\ n=4k+4 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Например, $i^{47}=i^{4\cdot 11+3}=i^{-3}=-i$

1.3. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Всякое комплексное число zможет быть представлено в ***тригонометрической*** *форме* $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Число rявляется *модулем,* а угол φ - *аргументом* комплексного числа z.

Если $z=a+bi$, то $r=\sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\varphi=\frac{a}{r}$; $\sin\varphi=\frac{b}{r}$. (1.6).

При определении угла φ следует использовать формулы:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi=arctg\left|b/a\right|, & если\ a>0, b>0,\\ \varphi=\pi-arctg\left|b/a\right|, & сли\ a<0, b>0,\\ \varphi=\pi+arctg\left|b/a\right|, & если\ a<0, b<0,\\ \varphi=2\pi-arctg\left|b/a\right|, & если\ a>0, b<0, \end{array}\right\} \qquad (1.7)$$

Модуль комплексного числа z обозначается еще $|z|$, а аргумент – $\arg z$.

Комплексные числа $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ (заданные в тригонометрической форме) ***умножаются*** и ***делятся*** соответственно по формулам

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \qquad (1.8)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (1.9)$$

Возведение комплексного числа в целую положительную степень осуществляется по формуле:

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (1.10).$$

Равенство $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$ называется ***формулой Муавра.***

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), r>0$, дает nразличных значений, которые можно найти по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad (1.11)$$

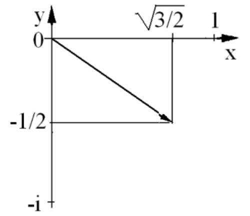
где $r\geq 0,\ k=1,2,...,n-1$.

В частности, $\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k=1,2,...,n-1.$

На комплексной плоскости эти точки находятся в вершинах правильного многоугольника, с центром в точке (0; 0), одна из вершин этого многоугольника находится в точке (1; 0).

Пример 1.6.Записать комплексное число $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ в тригонометрической форме.

Решение. Построим данное число на комплексной плоскости (см. рис.).



Модуль (радиус-вектор) комплексного числа:

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

Его аргумент (угол наклона радиус-вектора к оси x)равен:

$$\cos\varphi=\frac{a}{|r|}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \varphi=-\frac{\pi}{6}.$$

Знак «минус» обусловлен тем, что конец радиус-вектора находится в четвертой четверти комплексной плоскости.

В тригонометрической форме комплексное число записывается в виде: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Следовательно, заданное число запишется в виде: $z=\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)$.

Пример 1.7. Даны два комплексных числа в тригонометрической форме: $Z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right);\quad Z_2=3\left(\cos\frac{6}{7}\pi+i\sin\frac{6}{7}\pi\right)$. Записать их произведение и частное от деления первого числа на второе.

Решение. $z_1\cdot z_2=2\cdot 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{6}{7}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{6}{7}\pi\right)\right)=6(\cos\pi+i\sin\pi)$

$$\frac{z_1}{z_2}\cdot=\frac{2}{3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{6}{7}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{6}{7}\pi\right)\right)=\frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{5}{7}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{7}\pi\right)\right)$$

Пример 1.8. Дано комплексное число в алгебраической форме: $z=2-2i$

а) перевести его в тригонометрическую форму;

б) возвести в четвертую степень;

в) извлечь корень третьей степени.

Решение.

$$r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};\quad \cos\varphi=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\pi}{4};z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right);$$

$$z^4=\left(2\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\frac{7\pi\cdot4}{4}+i\sin\frac{7\pi\cdot4}{4}\right)=32(\cos7\pi+i\sin7\pi);$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right);\ k=1;2$$

1.4. Показательная форма комплексных чисел

Комплексное число z может быть представлено и в ***показательной форме:*** $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{\varphi i}$.

В частности: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi,$

$$e^{2\pi i}=1,\ e^{\pi i}=-1,\ e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\ e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i.$$

Для показательной формы чисел справедливы *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}),\ \ \sin\varphi=\frac{1}{2}(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})$$

В **показательной форме** комплексные числа **умножаются, делятся и возводятся в степень** соответственно по формулам

$$e^{\varphi_1 i}\cdot e^{\varphi_2 i}=e^{(\varphi_1+\varphi_2)i},\quad \frac{e^{\varphi_1 i}}{e^{\varphi_2 i}}=e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}\quad (e^{\varphi i})^n=e^{\varphi ni}.$$

Пример 1.9. Записать комплексное число $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ в показательной форме.

Решение. Модуль (радиус-вектор) комплексного числа:

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

Его аргумент равен: $\cos\varphi=\frac{a}{|r|}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \varphi=-\frac{\pi}{6}$. Знак «минус» обусловлен тем, что конец радиус-вектора находится в четвертой четверти комплексной плоскости.

В показательной форме комплексное число записывается в виде $z=re^{i\varphi}$, поэтому в нашем случае $z=e^{-\frac{\pi}{6}i}$

Пример 1.10. Даны два комплексных числа: $z_1=3e^{i\pi};\quad z_2=1{,}5e^{i\frac{\pi}{2}}$. Найти

а) $z_1\cdot z_2$; *б*) $\frac{z_1}{z_2}$

Решение *а*) $z_1\cdot z_2=3\cdot1{,}5e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=4{,}5e^{i\frac{3\pi}{2}}$;*б*) $\frac{z_1}{z_2}=(3:2)e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=2^{i\frac{\pi}{2}}$

Задания:

Вариант 1	**1, 10, 11, 16, 21**
Вариант 2	**2, 9, 12, 17, 22**
Вариант 3	**3, 8, 13, 18, 23**
Вариант 4	**4, 7, 14, 19, 24**
Вариант 5	**5, 6, 15, 20, 25**

Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной формах:

1. $\frac{1+i}{1-2i}-(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i)$.

2. $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$.

3. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17}$.

4. $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12}$.

5. $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3})$

6. $\frac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i)$

7. $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$

8. $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$

9. $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5}$

10. $\frac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13})$.

Выполните действия в тригонометрической форме. Результат запишите в показательной и алгебраической формах:

11. $4(\cos 220^\circ+i\sin 220^\circ)\cdot 1{,}5(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)$.

12. $3(\cos 280^\circ+i\sin 280^\circ):\frac{3}{4}(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ)$.

13. $(2(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ))^6$.

14. $\sqrt[3]{-8}$.

15. $3(\cos 340^\circ+i\sin 340^\circ):\frac{3}{8}(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)$.

16. $\sqrt[4]{16}$.

Запишите комплексное число в тригонометрической и алгебраической формах:

17. $2e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

18. $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

19. $2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

20. $3{,}2e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

21. $1{,}6e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

22. $6e^{\frac{7\pi}{4}i}$

23. $8e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

24. $6e^{2\pi i}$

25. $4e^{\frac{11\pi}{6}i}$

Практическое занятие № 2

Построение графа по заданным матрицам смежности и инцидентности; построение матриц по графу.

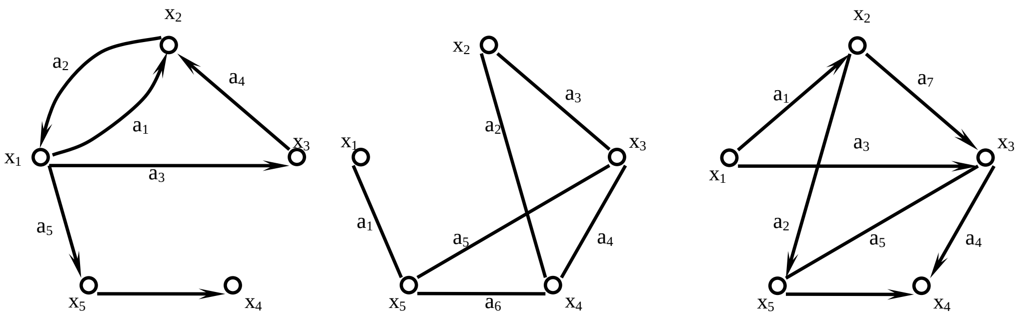
Цель: Научиться строить графы

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

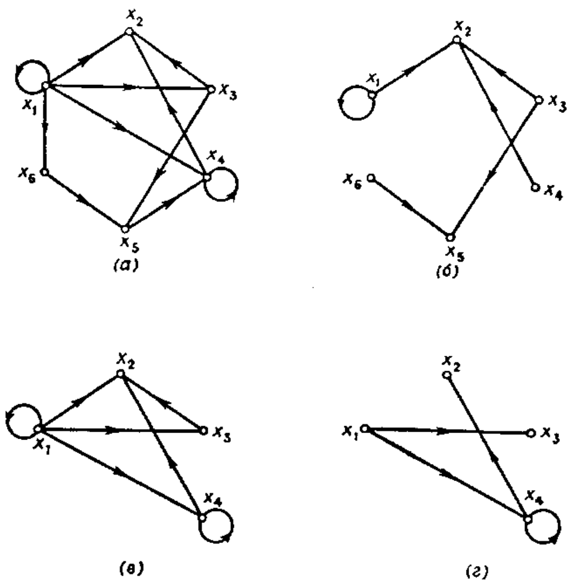
Граф *G* задается множеством точек или *вершин* $x_1, x_г, \ldots, x_n$(которое обозначается через *X)* и множеством линий или *ребер* $a_1, a_2, \ldots, a_m$(которое обозначается символом *А),* соединяющих между собой все или часть этих точек. Таким образом, граф *G*полностью задается (и обозначается) парой *(X, А).*

Если ребра из множества*А*ориентированы, что обычно показывается стрелкой, то они называются *дугами,* и граф с такими ребрами называется *ориентированным* графом. Если ребра не имеют ориентации, то граф называется *неориентированным*



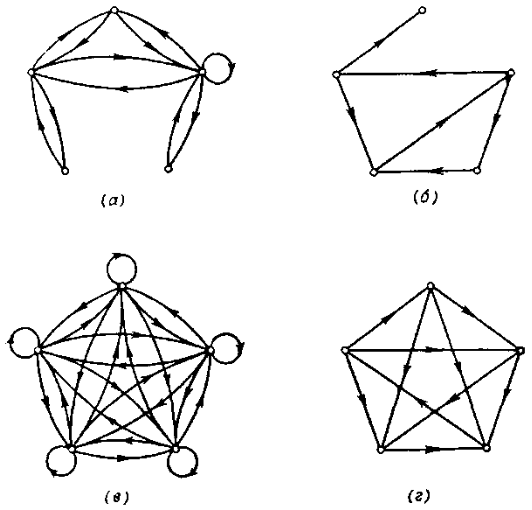
(*а*) (*б*) (*в*)

Пусть дан граф *G=(X, А). Остовным подграфом* G_pграфа *G*называется граф *(X,* A_p*),* для которого $A_p \subset A$. Таким образом, остовный подграф имеет то же самое множество вершин, что и граф *G,* но множество дуг подграфа G_pявляется подмножеством множества дуг исходного графа.



Типы графов

Граф $G=(X,A)$ называют *полным,* если для любой пары вершин x_i и x_j в *X*существует ребро $\overline{(x_i,x_j)}$ в $\overline{G}=(X,\overline{A})$, т. е. для каждой пары вершин графа *G* должна существовать по крайней мере одна дуга, соединяющая их. Полный неориентированный граф, построенный на *n*вершинах, обозначается через K_n.



Пусть дан граф *G*, его *матрица смежности* обозначается через $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ и определяется следующим образом:

$a_{ij}=1$, если в *G*существует дуга (x_i,x_j),

$a_{ij}=0$ если в *G*нет дуги (x_i,x_j).

Таким образом, матрица смежности графа, изображенного на рис. имеет вид

$$A = \begin{array}{c|cccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \cline{2-7}
x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cline{2-7}
\end{array}$$

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Например, сумма всех элементов строки x_i матрицы дает полустепень исхода вершины x_i, а сумма элементов столбца x_i — полустепень захода вершины x_i. Множество столбцов, имеющих 1 в строке x_i,. есть множество $\Gamma(x_i)$, а множество строк, которые имеют 1 столбце x_i, совпадает с множеством $\Gamma^{-1}(x_i)$.

Пусть дан граф *G* с *n* вершинами и *m* дугами. *Матрица инциденций* графа *G* обозначается через $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ и является матрицей размерности $n \times m$, определяемой следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_i,

$b_{ij} = -1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_i,

$b_{ij} = 0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_i или если a_j является петлей.

Для графа, приведенного на рис., матрица инциденций имеет вид

$$B = \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_{91} & a_{10} \\ \cline{2-11}
x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
x_2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{2-11}
\end{array}$$

Поскольку каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один – равный -1, либо все элементы столбца равны 0.

Если *G* является неориентированным графом, то его матрица инциденций определяется так же, как и выше, за исключением того, что все элементы, равные —1, заменяются на +1.

Задание:

Вариант 1

1. Представить в виде ориентированного графа отношение
$\rho = (V, E)$, $V = \{2, 4, 16, 22\}$, $E = \{(x, y) : x / y$ – четно$\}$.
2. Ориентированный граф G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задан списком дуг
$\{(1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (5, 1), (5, 6), (5, 6), (5, 6), (7, 4), (7, 6)\}$.
Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.
3. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Неориентированный граф G задан вершинами {1,2,3,4,5,6,7} и рёбрами {(1,3); (1,4); (1,5); (1,7); (2,3); (2,4); (2,7);(3,5); (3,7); (4,6); (4,7); (5,6); (6,7)}. Построить реализацию графа, найти его остов.

Вариант 2

1. Представить в виде ориентированного графа отношение
$\rho = (V, E)$,$V = \{2, 4, 16, 22\}$, $E = \{(x, y) : (x + y) / 6\}$.
2. Ориентированный граф G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задан списком дуг
$\{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 5),(5, 7), (7, 1)\}$.
Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.
3. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Неориентированный граф с множеством вершин {1,2,3,4,5,6,7} и ребрами {(1,4), (1,6), (2,1), (2,2), (2,6),(3,2), (3,4), (3,6), (4,6),(5,2), (5,4), (5,5), (6,2), (6,5), (7,1), (7,6)}. Построить реализацию графа, найти его остов.

Практическое занятие № 3

Производная функция и ее приложение для вычисления геометрических, механических и физических величин при решении профессиональных задач.

Цель: Закрепить умение применять производную в различных задачах

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ПРОИЗВОДНАЯ

Производные элементарных функций

1. $(C)'=0$	2. $(x)'=1$	3. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	4. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	5. $\left(e^x\right)'=e^x$
6 $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	7. $\left(\ln x=\dfrac{1}{x}\right)$	8. $(\sin x)'=\cos x$	9. $(\cos x)'=-\sin x$	10. $tgx'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $ctgx'=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$	12. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	13/$(arcctgx)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$	14. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15. $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования:

1. $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x);\ \left(f(x)-g(x)\right)'=f'(x)-g'(x)$
2. $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $(kf(x))'=kf'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Производная сложной функции: $f(\varphi(x))'=f'(u)(\varphi'(x))$

Исследование функции

Рассмотрим последовательность выполнения операций при исследовании функции и построении ее графика на следующем примере.

Пример. Исследуйте функцию и постройте ее график $y=x\sqrt{x}-6x$

Решение.

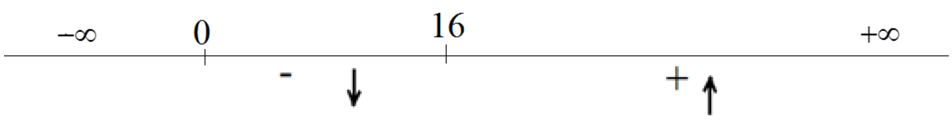
1) Область определения. $x\in[0,+\infty)$

2) Функция не периодическая.

3) Функция общего свойства, то есть не относится ни к четным, ни к нечетным, так как $y(-x)\neq y(x);\ y(-x)\neq -y(x)$..

3) Области возрастания-убывания.

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}-6;\quad \frac{3}{2}\sqrt{x}-6x=0;\ \frac{9}{4}x=36;\ 9x=144;\ x=16;\ x-16=0$$



$x\in(0;16)$ - функция убывает; $x\in(16;+\infty)$ - функция возрастает

4) Точки экстремумов: при переходе через $x=16$ первая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно при $x=16$ имеем минимум. Для определения значения этого минимума подставим $x=16$ в уравнение кривой:

$y(16) = 16\sqrt{16} - 6 \cdot 16 = 64 - 96 = -32.$ Таким образом, у графика функции имеется точка минимума с координатами (16; -32).

5) Точки пересечения с осями координат.

Для определения ординаты точки пересечения с осью Oy подставим в уравнение кривой $x = 0$. В результате получим: $y(0) = 0\sqrt{0} - 6 \cdot 0 = 0$.

Таким образом, график функции пересекает ось Oy при $y = 0$.

Для определения абсциссы точки пересечения с осью Ox подставим в уравнение кривой $y = 0$. В результате получим:

$$0 = x\sqrt{x} - 6x; \quad x(\sqrt{x} - 6) = 0; \quad x_1 = 0; \quad \sqrt{x} - 6 = 0; \quad x_2 = 36.$$

Таким образом, график функции пересекает ось Ox в двух точках: при $x = 0$ и $x = 36$.

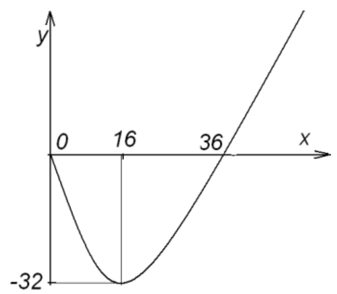
6) Области выпуклости-вогнутости.

Для определения участков вогнутости решаем неравенство: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} > 0$. Оно справедливо для любого x из области определения. Следовательно, график функции всюду вогнут.

Для определения участков выпуклости решаем неравенство: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} < 0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет участков выпуклости.

7) Точки перегиба:

Для определения точек перегиба решаем уравнение: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} = 0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.



8) Для построения графика функции начертим оси координат и отметим выявленные нами точки: минимума (16;-32) и пересечения с осями координат (0;0) и (36;0), а также области возрастания-убывания функции и ее вогнутости. В результате получим график, изображённый на рисунке.

Применение производной в геометрии

Производная функции $y = f(x)$ *в* некоторой точке x_0 численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке (x_0, y_0).

Касательной к графику функции $y = f(x)$*, дифференцируемой в точке* x_0*, называется прямая, проходящая через точку* $(x_0, f(x_0))$ *и имеющая угловой коэффициент* $k = f'(x_0)$.

При названных условиях уравнение касательной имеет следующий вид:

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$$

Механический смысл производной.

Если закон прямолинейного движения точки задан уравнением $s = f(t)$, где s- путь; t - время, то мгновенная скорость движения vв момент t определяется равенствами

$$v = f'(t) = s',$$

т. е. скорость точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от пути s по времени.

Ускорение точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от скоростиv по времени или вторая производная от пути s по времени.

Задание:

Вариант 1

1. Найдите производные: $y=\left(\cos x+x^2\right)\cdot x^4$ и $y=\sin\left(x^3-x^2\right)$.
2. Для функции $f(x)=3x-2tgx$ найдите $f'(0)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2-6x+5$ в точке $x_0=4$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 4с, если $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2-3$.
5. Найдите значение точки максимум x_0 для функции $y=-x^3-12x^2-36x+11$.

Вариант 2

1. Найдите производные: $y=\left(x^2+5x\right)\cdot e^x$ и $y=\left(x^2+7x-1\right)^3$.
2. Для функции $f(x)=10x+3\cos x$ найдите $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=2x^2-5x-3$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 5с, если $S=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2$.
5. Найдите значение точки максимум x_0 для функции $y=x^3-12x^2+45x-5$.

Вариант 3

1. Найдите производные: $y=\left(\sin x+3x^2\right)\cdot x^5$ и $y=\left(4x^2-2x+1\right)^3$.
2. Для функции $f(x)=2e^x+4x$ найдите $f'(0)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2+6x+8$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 3с, если $S=2t^3-5t^2+6$.
5. Найдите значение точки минимум x_0 для функции $y=-x^3+12x^2-21x+12$.

Вариант 4

1. Найдите производные: $y=(x-\cos x)\cdot\sin x$ и $y=\left(x^2+3x+5\right)^5$.
2. Для функции $f(x)=9\sin x+14x$ найдите $f'(\pi)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2+2x-8$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 2с, если $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2+3$.
5. Найдите значение точки минимум x_0 для функции $y=x^3-12x^2+36x-7$.

Практическое занятие № 4

Вычисление геометрических, механических и физических величин с помощью интегрального исчисления при решении профессиональных задач.

Цель: Закрепить умения находить неопределенные интегралы вычислять определенные интегралы

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первообразная. Неопределенный интеграл

*Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка существует производная **F'(x)**, равная $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.*

Множество первообразных для данной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования; С - константа.

Неопределенные интегралы элементарных функций

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2} \right\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

Методы интегрирования

Ниже перечислены основные свойства интегралов.

1. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx \quad (3.3)$$

2. *Интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов:*

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \quad (3.4)$$

3. *Вид интеграла не зависит от вида переменной интегрирования:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(dx)] + C. \quad (3.5)$$

или, что тоже самое,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(dx)] + C,$$

где $\varphi(x)$ - функция, непрерывная вместе со своей производной.

Рассмотрим основные методы интегрирования:

I. ***Непосредственное интегрирование.***

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример. Найти $\int\left(4x^3-15x^2+14x-3\right)dx$

Решение. Воспользуемся свойством 2. интеграла: интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих же функций.

$$\int\left(4x^3-15x^2+14x-3\right)dx=\int 4x^3dx-\int 15x^2dx+\int 14xdx-\int 3dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-15\frac{x^3}{3}+14\frac{x^2}{2}-3x+C=$$
$$=x^4-5x^3+7x^2-3x+C$$

II. *Метод подстановки*.

Этот метод называют также *методом замены переменной.* Использование этого метода основано на свойстве 3 интеграла. Его следует применять, когда интеграл не привести к табличному виду с помощью тождественных преобразований, и в то же время можно привести к табличному виду с помощью замены переменных.

Пример. Найти $\int(2+x)^7dx$

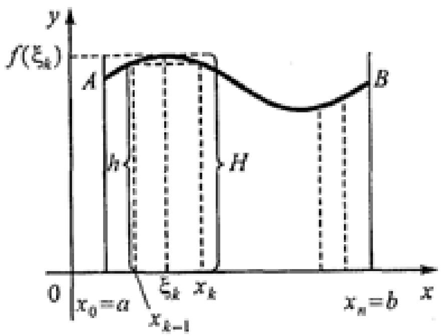
Решение. Введем новую переменную: $2+x=t;\ x=t-2;\ dx=dt$. Найдем интеграл:

$\int(2+x)^7dx=\int t^7dt=\dfrac{t^8}{8}+C$ Выразим результат через первоначальный аргумент:

$$\int(2+x)^7dx=\frac{(2+x)^8}{8}+C$$

Определенный интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции. *Дана плоская фигура, ограниченная графиком функции* $y=f(x)>0$ *и отрезками прямых* $y=0,\ x=a,\ x=b$. *Функция* $y=f(x)$ *определена, не*прерывна и неотрицательна в промежутке $[a,b]$. Вычислить площадь S полученной фигуры $aABb$, называемой *криволинейной трапецией.*



Определение. *Предел* $S=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ *называют* **определенным интегралом** *от функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a,\ b]$ *и обозначают* $\int_a^b f(x)dx$ *т. е.*

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

Число a *называется* **нижним пределом** *интеграла,* b-**верхним**.

Промежуток $[a,\ b]$ *называется* **промежутком интегрирования**, x-**переменной интегрирования.**

Теорема. *Определенный интеграл функции* $f(x)$, *непрерывной на промежутке [a, b], равен разности значений любой ее первообразной в точках b и a*

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)\qquad \textit{формулы Ньютона-Лейбница.}$$

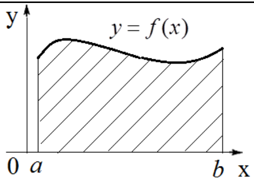
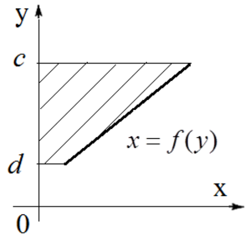
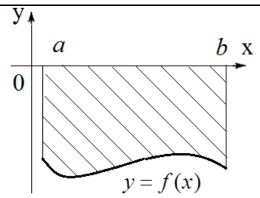
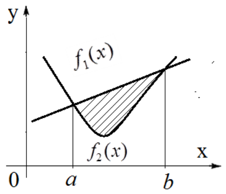
Пример. Вычислить $\int\limits_{-2}^{3}xdx$

Решение. Находим неопределенный интеграл: $\int_{-2}^{3} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{3}$ Найдя значение $\frac{x^2}{2}$ сначала при $x=3$, а затем при $x=-2$, вычислим разность:

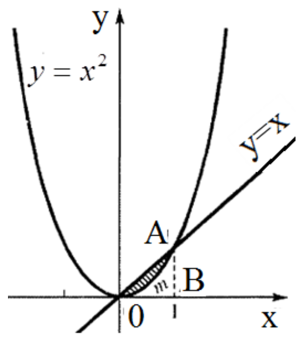
$$\int_{-2}^{3} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{3} = \frac{3^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{9-4}{2} = 2{,}5$$

Площади плоских фигур и объемы тел вращения

Формулы для вычисления площади плоской фигуры.

Тип условия задачи	Чертеж	Формула
1		$S = \int_a^b f(x)dx$
2		$S = \int_d^c f(y)dy$
3		$S = -\int_a^b f(x)dx$
4		$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную графиками функций: $y = x^2;\ y = x$



Решение.Построим графики данных функций, найдя прежде точки их пересечения путем решения системы: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$.Решив эту систему, получим точки O(0; 0) и A(1; 1).

В данном случае подходит тип условия 4 задачи.

$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ кв.ед.$$

Приложения определенного интеграла в механике

Путь, пройденный телом при неравномерном движении за время $t_2 - t_1$, **вычисляется по формуле:** $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt,\ f(t) = v$.

Пример. Скорость движения материальной точки задана уравнением $v = 9t^2 - 8t,\ м/с$. Определить ее путь за четвертую секунду.

Решение. $t_1 = 3с, \quad t_2 = 4с$

$$S = \int\limits_3^4 \left(9t^2 - 8t\right)dt = \left(3t^3 - 4t^2\right)\Big|_3^4 = \left(3 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2\right) - \left(3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2\right) = 128 - 45 = 83м.$$

Ответ *83 м*.

Пример. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2 м/с$. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение Скорость движения тела равна пулю в моменты начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно *t*:

$12t - 3t^2 = 0; 3t(4 - t) = 0; t_1 = 0; t_2 = 4$ t_1, t_2 - пределы интегрирования.

$$S = \int\limits_0^4 \left(12t - 3t^2\right)dt = \left(6t^2 - t^3\right)\Big|_0^4 = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 32м$$ **Ответ.** *S = 32 м.*

Задания:

Вариант 1

1. Найдите неопределенные интегралы:
   $\int\left(5x^7+2\right)dx$
   $\int\left(5^x-\dfrac{1}{x}\right)dx$
   $\int\left(6x-5\right)^4dx$
   $\int\dfrac{dx}{\cos^2 6x}$
2. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-2}^{2}5x^4dx$ и $\int_{4}^{25}\dfrac{3}{\sqrt{x}}dx$.
3. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2}\left(4x-3\right)^3dx$.
4. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V=8t+1$.
5. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=x^3$; $x=2$; $x=4$ и $y=0$.

Вариант 2

1. Найдите неопределенные интегралы:
   $\int\left(8\sin x+3\right)dx$
   $\int\left(3^x+\dfrac{1}{x}\right)dx$
   $\int\left(4-5x\right)^6dx$
   $\int e^{2x+8}dx$
2. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-2}^{1}12x^3dx$ и $\int_{9}^{16}\dfrac{2}{\sqrt{x}}dx$.
3. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2}\left(5x-4\right)^2dx$.
4. Найдите путь, пройденный телом за 4 секунды, если его скорость определяется формулой: $V=t+6$.
5. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=9x^2$; $x=2$; $x=3$ и $y=0$.

Вариант 3

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$\int (6\cos x - 2)dx$$

$$\int \left(\frac{1}{x} - 2^x\right)dx$$

$$\int (7-3x)^5 dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 8x}$$

2. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-1}^{2} 16x^3 dx$ и $\int_{1}^{4} \frac{4}{\sqrt{x}} dx$.
3. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2} (4x-2)^2 dx$.
4. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V = 2t + 3$.
5. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = x^2$; $x = 3$; $x = 6$ и $y = 0$.

Вариант 4

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$\int \left(4 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$\int \left(\frac{1}{x} - 7^x\right)dx$$

$$\int (4x-3)^7 dx$$

$$\int e^{4x-7} dx$$

2. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-3}^{1} 8x^3 dx$ и $\int_{1}^{9} \frac{5}{\sqrt{x}} dx$.
3. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2} (6x-5)^2 dx$.
4. Найдите путь, пройденный телом за 3 секунды, если его скорость определяется формулой: $V = 10t - 8$.
5. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = 4x^3$; $x = 1$; $x = 2$ и $y = 0$.

Практическое занятие № 5

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$f(x,\ y,\ y') = 0$$

или

$$y' = F(x,\ y).$$

Определение ***Решением дифференциального уравнения первого порядка*** *называется функция $y = \varphi(x)$, один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.*

Пример *Решить уравнение*

$$y' = x.$$

Р е ш е н и е. Решением уравнения является функция $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$, где C — произвольная действительная постоянная.

Определение ***Общим решением дифференциального уравнения*** *называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения.*

Таким образом, если решение дифференциального уравнения задается формулой $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$, то она задает общее решение, если

1. при каждом фиксированном $C = C_0$ эта функция определяет решение;
2. любое решение может быть найдено из этой формулы при некотором $C = C_0$.

Определение ***Частным решением дифференциального уравнения*** *называется решение, полученное из формулы (формул) общего решения при некотором значении $C = C_0$.*

В примере формула $y = \frac{x^2}{2} + C$ задает общее решение, а, например, решения $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$ — частные решения.

Найти решение дифференциального уравнения — значит выразить решение в квадратурах — через элементарные функции и их неопределенные интегралы.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение . ***Уравнениями с разделяющимися переменными*** *называются уравнения вида*

$$y' = f(x)g(y)$$

или

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0.$$

Метод разделения переменных (формальный).

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

Умножив уравнение на $\frac{dx}{g(y)}$, получим

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{g(y)} & = & f(x)dx, \\ g(y) & \neq & 0, \end{array}\right. \\ g(y) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \ y(x) \text{ — делаем проверку, подставляя в уравнение.}$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

откуда находим решение в виде $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$.

Замечание Общее решение может не задаваться одной формулой. Иногда форма его записи зависит от способа записи постоянной или от метода интегрирования.

Пример *Решить уравнение* $y' = xy^2$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{y^2} & = & xdx, \\ y & \neq & 0, \end{array}\right. \\ y = 0. \end{array}\right.$$

$y \equiv 0$ — решение, проверяется подстановкой в уравнение.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

Отметим, что решение $y(x) \equiv 0$ не получается из этой формулы ни при каком значении C, поэтому общее решение определяется их совокупностью.

Задание:
Вариант 1

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = 5e^{-2x} - 2x + 1, y' + 2y = -4x$
2. Решите д у с разделёнными переменными $2ydy = 3x^2dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $2xdy = (y+2)dx$; $xy' - y = 0$
4. Найдите частное решение, если: $y' = y, y(-2) = 4$

Вариант 2

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = \cos 2x, y' + 2xy = 0$
2. Решите д у с разделёнными переменными $3y^2dy = 4x^3dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $(x-2)dy = 2ydx.$; $xy' = yx^2$
4. Найдите частное решение, если: $xy' + y = 0, y(-2) = 8$

Вариант 3

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = x + Ce^x, (x - y + 1)y' = 1$
2. Решите д у с разделёнными переменными $3y^2dy = 2xdx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $2xdy = (y-2)dx$; $yy' + x = 0$
4. Найдите частное решение, если: $2\sqrt{y}dx = dy, y(0) = 1$

Вариант 4

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = 3e^{-x} - x + 1, y' + y = -x$
2. Решите д у с разделёнными переменными $4y^3dy = 3x^2dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $(x+2)dy = 2ydx.; x^2y' + y = 0$
4. Найдите частное решение, если: $x^2y' + y^2 = 0, y(-1) = 1$

Практическое занятие № 6

Решение однородных дифференциальных уравнений

Цель: Научиться решать однородные дифференциальные уравнения

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Определение. *Функция f(x,y) называется однородной степени n относительно переменных x и y, если при любом значении h* $f(hx,hy)=h^n f(x,y)$.

Например, $f(x,y)=3x^3-2x^2y+xy^2$ - однородная функция третьей степени относительно *x* и *y*.

Определение. Дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ *называется однородным, если его правая часть f(x, y) является однородной функцией нулевой степени.*

Однородным будет уравнение вида $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ или $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$- однородные функции одной и той же степени.

Однородное уравнение с помощью подстановки $y=U(x)$, где *u* - некоторая функция переменной *x,* можно привести к уравнению с разделяющимися переменными относительно переменных *x* и *u.*

Пример. Найти общее решение уравнения $x^2y'=(x-y)y$.

Решение. Представим уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2}$. Это уравнение является однородным. Сделаем подстановку $y=xu$, откуда $y'=xu'+u$. Таким образом, уравнение примет вид $xu'+u=\frac{(x-ux)ux}{x^2}$. Выполним преобразования: $xu'+u=\frac{x^2u-u^2x^2}{x^2}$; $xu'+u=(1-u)u$; $x\frac{du}{dx}=-u^2$; $-\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$. Интегрируя, будем иметь $\ln|x|=\frac{1}{u}+\ln|c|$. Но $u=\frac{y}{x}$, подставив это в предыдущее выражение, будем иметь $y=x\ln\frac{c}{x}$. То есть, общее решение уравнения - это функция $y=x\ln\frac{c}{x}$

Пример. Найти общее решение уравнения $x^2y'+y^2=xyy'$

Решение. Запишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$. Правая часть этого уравнения есть однородная функция нулевой степени. Сделав подстановку $y=xu$, получаем $x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2}{u-1}$

Разделяя переменные, будем иметь $\frac{dx}{x}=\frac{(1-u)du}{u}$. Интегрируя это уравнение, находим его общий интеграл: $\frac{u}{x}=Ce^u$. Но $u=\frac{y}{x}$, поэтому общий интеграл уравнения будет иметь вид $y=Ce^{y/x}$.

11.39. $(x+y)dx+xdy=0$; $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x}$ $\quad y=xu$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+ux}{x};\ \frac{du}{dx}=-1-u;\ \frac{du}{-1-u}=dx;\ \int\frac{du}{-1-u};1+u=t;\ du=dt;$

$\int\frac{du}{-1-u}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|1+u|+C=-\ln|1+\frac{y}{x}|+C;$

$\int dx=x;\ -\ln|1+\frac{y}{x}|+C=x$

11.40. $(x-y)ydx-x^2dy=0;\ \frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2};\ y=ux;\ x\frac{du}{dx}=\frac{(x-ux)ux}{x^2};$

$\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{x^2};\ x^2du=(1-u^2)dx;\ \frac{du}{1-u^2}=\frac{dx}{x^2};\ \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|==-\frac{1}{x}+C;\ \ln\left|\frac{y-x}{y+x}\right|-\ln C=-\frac{1}{x}$

Задания:

Вариант 1		
1	Найти общее решение уравнения	$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$
2	Найти общее решение уравнения	$xy' = 3y - x$
3	Найти общее решение уравнения	$\frac{dy}{dx} = \frac{3x + y}{x}$
4	Найти общее решение уравнения	$y' = \frac{y + 2\sqrt{xy}}{x}$
5	Найти общее решение уравнения	$xy' - y = xtg\left(\frac{y}{x}\right)$
6	Найти общее решение уравнения	$y' = \frac{y}{x} + 1/\cos\left(\frac{y}{x}\right)$
Вариант 2		
1	Найти общее решение уравнения	$y' = 1 + \frac{y}{x}$
2	Найти общее решение уравнения	$\frac{x^2 + y^2}{x} dx = 2ydy$
3	Найти общее решение уравнения	$yy' - 2y + x = 0$
4	Найти общее решение уравнения	$(x - y)dx + xdy = 0$
5	Найти общее решение уравнения	$y' = \frac{x + 2y}{2x}$
6	Найти общее решение уравнения	$y' = \frac{x^2 + xy}{x^2}$
Вариант 3		
1	Найти общее решение уравнения	$y^2 dx - (x^2 + xy)dy = 0$
2	Найти общее решение уравнения	$(x - y)dy = (x + y)dx$
3	Найти общее решение уравнения	$(x^2 - xy + y^2)dx - x^2 dy =$
4	Найти общее решение уравнения	$dy - \frac{(2y + x)dx}{y} = 0$

5	Найти общее решение уравнения	$x^2+y^2=2xyy'$
6	Найти общее решение уравнения	$\mathrm{xdy} = (\mathrm{y} + \sqrt{4\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2})dx$
Вариант 4		
1	Найти общее решение уравнения	$(2x+y)dx - xdy = 0$
2	Найти общее решение уравнения	$y' = \dfrac{x+y}{x-y}$
3	Найти общее решение уравнения	$y' = \dfrac{2x+y}{x}$
4	Найти общее решение уравнения	$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$
5	Найти общее решение уравнения	$xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$
6	Найти общее решение уравнения	$y' = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$
Вариант 5		
1	Найти общее решение уравнения	$(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$
2	Найти общее решение уравнения	$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$
3	Найти общее решение уравнения	$xyy' = y^2 + 2x^2$
4	Найти общее решение уравнения	$y' = 4 + \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$
5	Найти общее решение уравнения	$(y + 2\sqrt{xy})dx = xy'$
6	Найти общее решение уравнения	$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$
Вариант 6		
1	Найти общее решение уравнения	$y' = \dfrac{2x+y}{x}$
2	Найти общее решение уравнения	$xdy = x + 2ydx$
3	Найти общее решение уравнения	$(x-y)y' = x + y$
4	Найти общее решение уравнения	$xy' = 3x + y$
5	Найти общее решение уравнения	$(x-y)dy + ydx = 0$

6	Найти общее решение уравнения	$y'=\dfrac{xy+y^2}{y^2}$
	Вариант 7	
1	Найти общее решение уравнения	$(x+y)dx+xdy=0$
2	Найти общее решение уравнения	$y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$
3	Найти общее решение уравнения	$(x-y)ydx-x^2dy=0$
4	Найти общее решение уравнения	$xyy'=y^2+2x^2$
5	Найти общее решение уравнения	$xy^2dy=\left(y^3+x^3\right)dx$
6	Найти общее решение уравнения	$xy+y^2=(2x^2+xy)y'$
	Вариант 8	
1	Найти общее решение уравнения	$ydx=\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$
2	Найти общее решение уравнения	$(x^2-2y^2)dx+2xydy=0$
3	Найти общее решение уравнения	$xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$
4	Найти общее решение уравнения	$xy'\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)+x=y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$
5	Найти общее решение уравнения	$(x+y)dx+(y-x)dx=0$
6	Найти общее решение уравнения	$y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)+\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$
	Вариант 9	
1	Найти общее решение уравнения	$\left(x^2+y^2\right)dx=2xydy$
2	Найти общее решение уравнения	$xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$
3	Найти общее решение уравнения	$\left(\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$
4	Найти общее решение уравнения	$xy'\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=x+y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$
5	Найти общее решение уравнения	$xdy-ydx=ydy$
6	Найти общее решение уравнения	$\left(x^2+y^2\right)dx-xydy=0$
	Вариант 10	

1	Найти общее решение уравнения	$y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}$
2	Найти общее решение уравнения	$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$
3	Найти общее решение уравнения	$\left(x^2 + xy + e^2\right)dx = x^2 dy$
4	Найти общее решение уравнения	$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$
5	Найти общее решение уравнения	$xy' = xe^{y/x} + y$
6	Найти общее решение уравнения	$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

Практическое занятие № 7

Нахождение частные решений дифференциальных уравнений по заданным условиям

Цель: научиться находить частное решение для д.у.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Частные решения уравнений

Решение дифференциального уравнения, содержащее столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения, называется *общим решением* этого уравнения. Для уравнений первого и второго порядков соответственно общее решение имеет вид: $y=\varphi(x,C)$; $y=\varphi(x,C_1,C_2)$.

Функции, получаемые из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются *частными решениями* этого уравнения. Геометрически общее решение определяет *семейство кривых,* а частное решение — некоторую кривую этого семейства.

Для нахождения частного решения дифференциального уравнения задают *начальные условия.* Для уравнения первого порядка они имеют вид $y(x_0)=y_0$; для уравнения второго порядка - вид $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y'_0$. По этим начальным условиям определяют значения произвольных постоянных в общем решении уравнения, в результате чего получают частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Пример 5. Общее решение дифференциального уравнения $y'-3y=0$ имеет вид $y=Ce^{3x}$. Найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=e^3$.

Решение. Значение произвольной постоянной C, соответствующее искомому частному решению, получаем в результате подстановки в выражение общего решения заданных начальных условий: $e^3=Ce^3$. Откуда $C=1$. Следовательно частное решение уравнения имеет вид: $y=e^{3x}$

Пример 6. Найдите частное решения дифференциального уравнения $(1+x^3)y'=3x^2y$ с начальными условиями: $y(0)=2$

Решение. $\frac{dy}{y}=\frac{3x^2}{(1+x^3)}dx;\ \ln y=\ln(1+x^3)+\ln C;\ y=(1+x^3)C$ - общее решение.

Подставив в него начальные условия $y(0)=2$, получим: $2=(1+0)C;\quad C=2.$

Следовательно, частное решение имеет вид: $y=2(1+x^3)$.

Пример 7. Найдите частное решения дифференциального уравнения $2\sqrt{y}dx - dy = 0$ с начальными условиями $y(1) = 3$

Решение. $2dx = \dfrac{dy}{\sqrt{y}}$; $2x = 2\sqrt{y} + C$ - общее решение уравнения.

Подставив в общее решение начальные условия $y(1) = 9$, получим: $2 = 2 \cdot \sqrt{9} + C;\quad C = -4$.

Подставив это значение константы в общее решение, получим частное решение уравнения: $2x = 2\sqrt{y} - 4;\ x = \sqrt{y} - 2$. Ответ: $x = \sqrt{y} - 2$.

Задания:

Вариант 1		
1	Найти частное решение уравнения	$(2x+1)dy + y^2dx = 0;\ y(0) = \dfrac{1}{2}$
2	Найти частное решение уравнения	$(2x+1)^2 y' - y = 0;\ y(1) = e$
3	Найти частное решение уравнения	$y\dfrac{dy}{dx} + 2x + 1 = 0;\ y(1) = 2$
Вариант 2		
1	Найти частное решение уравнения	$(xy^2 + x) + (x^2y - y)y' = 0;$ $y(4) = 1$
2	Найти частное решение уравнения	$(2xy + x)dx - (x^2 + 1)dy = 0,$ $y(1) = 0$
3	Найти частное решение уравнения	$ydx + (xy^2 - y^2)dy = 0;\ y(2) = 2$
Вариант 3		
1	Найти частное решение уравнения	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+y}};$ $y(-1) = 0$
2	Найти частное решение уравнения	$\dfrac{\sqrt{y}}{\sin x}y' = 1;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
3	Найти частное решение уравнения	$\dfrac{y'}{\cos x} = \sqrt{y};\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$
Вариант 4		
1	Найти частное решение уравнения	$xyy' = 1 - x^2;\ y(2) = 1$
2	Найти частное решение уравнения	$x^2dy = (1-x)(1+x)dx;\ y(1) = 2$
3	Найти частное решение уравнения	$\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{1-x^2};\ y(1) = 2$
Вариант 5		
1	Найти частное решение уравнения	$\sqrt{y}dx + x^2dy = 0;\ y(1) = 1$
2	Найти частное решение уравнения	$\sqrt{y} + xy' = 0;\ y(e) = 1$
3	Найти частное решение уравнения	$\dfrac{\sqrt{y}dx}{2} = \dfrac{(x+1)dy}{\sqrt{y}};\ y(1) = -1$

Вариант 6		
1	Найти частное решение уравнения	$y'(1+y)=xy; \quad y(1)=1$
2	Найти частное решение уравнения	$(1+y)dy=y^2dx;\ y(1)=e$
3	Найти частное решение уравнения	$xy=\frac{(1+y)}{x}y';\ y(3)=1$
Вариант 7		
1	Найти частное решение уравнения	$\frac{xdy}{x^2+1}=\frac{ydx}{y^2+1};\ y(1)=2$
2	Найти частное решение уравнения	$\frac{x^2}{x^2+1}y'=\frac{y^2}{y^2+1};\ y(3)=1$
3	Найти частное решение уравнения	$\frac{y'}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{y\left(y^2+1\right)};\ \ y(0)=2$
Вариант 8		
1	Найти частное решение уравнения	$y'=\frac{x+1}{y-1};\ y(0)=2$
2	Найти частное решение уравнения	$dy=\frac{1-y}{1+x}dx;\ y(1)=-1$
3	Найти частное решение уравнения	$\frac{1-y^2}{y+1}dx=\frac{dy}{1+x};\ y(1)=0$
Вариант 9		
1	Найти частное решение уравнения	$(xy^2-y^2)dx+(x^2y+x^2)dy=0;$ $y(2)=1$
2	Найти частное решение уравнения	$(x^2y^2-y^2)dx+(x^2y^2+x^2)dy=0;$ $y(1)=1$
3	Найти частное решение уравнения	$(xy-y)=(xy+x)y';$ $y(2)=2e$
Вариант 10		
1	Найти частное решение уравнения	$\sqrt{y}dx+x^2dy=0;\ y(1)=4$
2	Найти частное решение уравнения	$\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{dy}{x^2};\ y(0)=1$
3	Найти частное решение уравнения	$y\sqrt{y}=xy';\ y(1)=4$

<u>Практическое занятие № 8</u>

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y'' + py' + q = 0,$$

где p и q — действительные числа. Рассмотрим, как решаются однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка зависит от корней характеристического уравнения. Характеристическое уравнение — это уравнение **$k^2+pk+q=0$.**

1) Если корни характеристического уравнения — различные действительные числа:

$$k_1 \in R, k_2 \in R, k_1 \neq k_2,$$

то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) Если корни характеристического уравнения — равные действительные числа

$$k_1 \in R, k_2 \in R, k_1 = k_2$$

(например, при дискриминанте, равном нулю), то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка есть

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

3) Если корни характеристического уравнения — комплексные числа

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

(например, при дискриминанте, равном отрицательному числу), то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка записывается в виде

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Задание:

Вариант 1

1. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y'' - 7y' + 12y = 0$; b) $y'' - 2y' + y = 0$; c) $y'' - 2y' + 10y = 0$
2. Найдите общее решение неоднородного уравнений: a) $y'' = 2x$; b) $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 1$

Вариант 2

1. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y'' + 3y' + 2y = 0$; b) $y'' - 4y' + 4y = 0$; c) $y'' + 4y' + 13y = 0$
2. Найдите общее решение неоднородного уравнений: a) $y'' - 2y' - 3y = 2x$; b) $y'' + 3y' = 1$

Вариант 3

1. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y'' - 5y' + 6y = 0$; b) $y'' + 6y' + 9y = 0$; c) $y'' + 4y' + 8y = 0$
2. Найдите общее решение неоднородного уравнений: a) $y'' + y' - 2y = 2x + 5$; b) $y'' - 2y' - 3y = x^2$

Вариант 4

1. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y'' - y' - 6y = 0$; b) $y'' + 4y' + 4y = 0$; c) $y'' + 25y = 0$
2. Найдите общее решение неоднородного уравнений: a) $y'' - y' = 4 + x$; b) $y'' - 4y = 8x^3$

Практическое занятие № 9

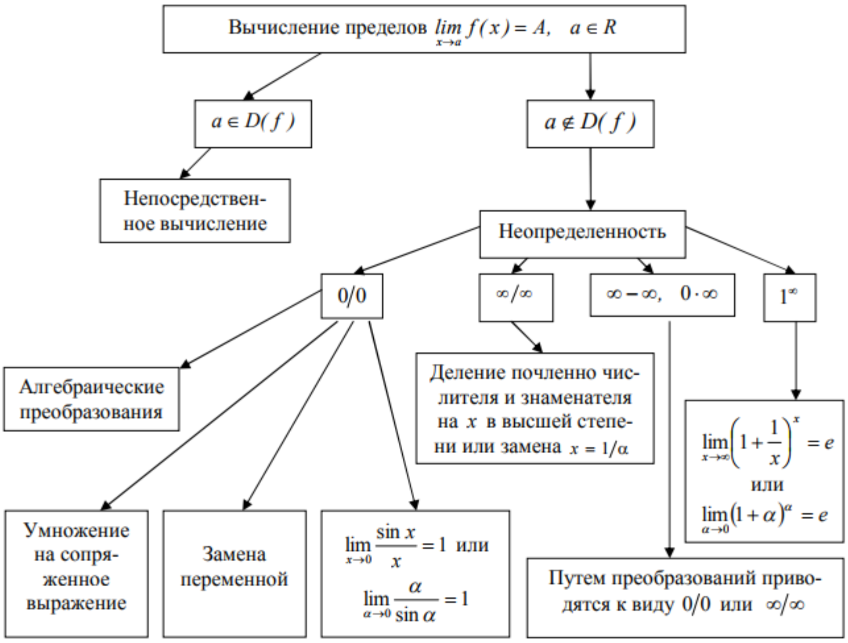
Решение задач на определение сходимости числовых рядов по известным признакам

Цель: Научиться определять сходимость рядов

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Способы вычисления пределов



Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданной отношением двух многочленов, существует два способа:

1) каждый член числителя и знаменателя необходимо разделить на x в наивысшей степени;

2) применить метод замены переменной: $x=\frac{1}{\alpha}$ (при $x\to\infty$ $\alpha\to0$).

Пример Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

1 способ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{4}{x}}=\frac{2}{3}$,так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{4}{x}$ стремится к нулю.

а) Дробно-рациональные функции. В этом случае: в числителе и знаменателе выделяется множитель $(x-a)$ и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель;

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Применим способ группировки слагаемых в числителе и знаменателе дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

б) Дробно-иррациональные функции. Для избавления от неопределенности в этом случае существует два способа:

1) умножение числителя и знаменателя дроби на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

2) метод замены переменной.

В результате таких преобразований удается свести данный случай к уже рассмотренному в предыдущем пункте.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}x=t^6,\ \sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2,\\ x\to 1\Rightarrow t\to 1\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

в) Пределы от функций, в которых участвуют *тригонометрические выражения*, обычно сводятся к *первому замечательному пределу.*

Теорема (признак Даламбера). Если в ряде с положительными членами $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ отношение $(n+1)$-го члена ряда к n-му при $n\to\infty$ имеет конечный предел D, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=D$, то:- ряд сходится в случае $D<1$,- ряд расходится в случае $D>1$.В случаях, когда предел не существует или он равен единице, ответа на вопрос о сходимости или расходимости теорема не дает. Необходимо провести дополнительное исследование.

Задание:

__**Вариант 1**__

1. Найдите вторые члены рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$;

2. Найдите частичную сумму S_2 для рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n+1)(n+2)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n+1)n$

3. Выясните, сходится или расходится ряд, используя необходимый признак сходимости:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n-7}{7n^2+10n-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^5-4n^4+1}{1-4n^3+7n^4}$;

4. Выясните, сходится или расходится ряд, используя достаточный признак сходимости (Даламбера):

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdots(2n+5)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$

__**Вариант 2**__

1. Найдите вторые члены рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$;

2. Найдите частичную сумму S_2 для рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

3. Выясните, сходится или расходится ряд, используя необходимый признак сходимости:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^4+4}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)(n^2+4)}{2n^4+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2n+5}{1+10n+7n^2}$;

4. Выясните, сходится или расходится ряд, используя достаточный признак сходимости (Даламбера):

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^{3n+2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{3\cdot7\cdot11\cdots(4n-1)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^4}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{1\cdot4\cdot10\cdots(3n+1)}$

Практическое занятие № 15

Решение комбинаторных задач

Цель: Закрепить умение решать комбинаторные задачи

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Методы решения комбинаторных задач

Перебор возможных вариантов

Простые задачи решают обыкновенным полным перебором возможных вариантов без составления различных таблиц и схем.

Задача

Какие двузначные числа можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Ответ: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 55.

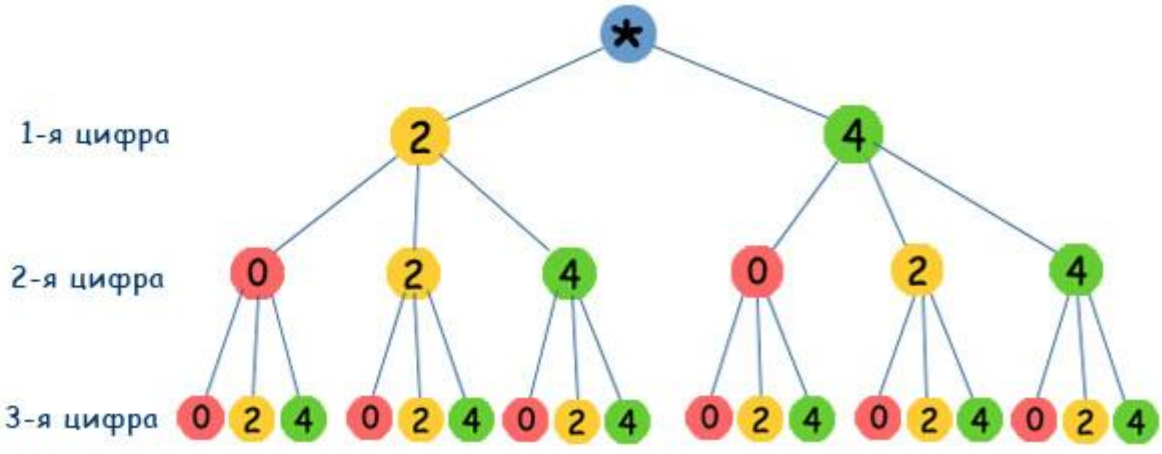
Дерево возможных вариантов

Самые разные комбинаторные задачи решаются с помощью составления специальных схем. Внешне такая схема напоминает дерево, отсюда и название метода - **дерево возможных вариантов.**

Задача

Какие трехзначные числа можно составить из цифр 0, 2, 4?

Решение. Построим дерево возможных вариантов, учитывая, что 0 не может быть первой цифрой в числе.



Ответ: 200, 202, 204, 220, 222, 224, 240, 242, 244, 400, 402, 404, 420, 422, 424, 440, 442, 444.

Составление таблиц

Решить комбинаторные задачи можно с помощью таблиц. Они, как и дерево возможных вариантов, наглядно представляют решение таких задач.

Задача

Сколько нечетных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9?

Решение. Составим таблицу: слева первый столбец - первые цифры искомых чисел, вверху первая строка - вторые цифры.

	1	3	7	9
1	11	13	17	19
3	31	33	37	39
4	41	43	47	49
6	61	63	67	69
7	71	73	77	79
8	81	83	87	89
9	91	93	97	99

Ответ: 28.

Правило умножения

Этот метод решения комбинаторных задач применяется, когда не требуется перечислять все возможные варианты, а нужно ответить на вопрос - сколько их существует.

Задача

В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они для трусов и футболок использовали белый, красный, синий и зеленый цвета, причем были представлены все возможные варианты. Сколько команд участвовали в турнире?

Решение.

Трусы могут быть белого, красного, синего или зеленого цвета, т.е. существует 4 варианта. Каждый из этих вариантов имеет 4 варианта цвета майки.

4 х 4 = 16.

Ответ: 16 команд.

С помощью основных формул комбинаторики

Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n=n!$.

Число размещений в комбинаторике обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Задание:

1. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 8, 9 и 0? (составьте дерево возможных вариантов)
2. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2 и 3? (составьте дерево возможных вариантов)
3. Сосчитайте все двузначные числа, в записи которых используются только цифры 3, 5, 7 и 9.
   - Сколько их с повторениями?
   - Сколько их, если цифры в числе не могут повторяться?
4. Сколькими способами можно прочитать слово «квадрат»?

```
      к
     в в
    а а а
   д д д д
  р р р р р
 а а а а а а
т т т т т т т
```

5. Вычислите: $5!$ $\frac{5!-4!}{3!}$ A_5^3 $\frac{P_2+P_3}{P_4}$ C_8^3
6. Возведите в степень: $(a-b)^6$ $(3+x)^4$
7. Сколько вариантов распределения мест в соревнованиях возможно между пятью спортсменами?
8. Сколькими способами между пятью спортсменами можно распределить «золотую», «серебряную» и «бронзовую» медали?
9. Сколькими способами из пяти спортсменов можно отобрать трёх для участия в соревновании?

Вариант 2

1. В алфавите племени «АБ» имеются только 2 буквы «а» и «б». Сколько различных трёхбуквенных слов можно составить, используя этот алфавит? 9составьте дерево возможных вариантов)
2. Запишите все двузначные числа, состоящие из цифр 9, 1 и 0
   - Сколько их с повторениями?
   - Сколько их без повторений цифр?
3. Сколькими способами можно прочитать слово «строка»?

   строка
   трока
   рока
   ока
   ка
   а
4. Вычислите: A_8^3 $\frac{6!+2!+4}{3!}$ $\frac{P_4-P_3}{P_2}$ C_5^3
5. Возведите в степень: $(a-b)^4$ $(x+2)^5$
6. Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, зелёный и коричневый переплёты. Сколькими способами он может это сделать?
7. Сколько вариантов распределения трёх путёвок в разные санатории для семи претендентов возможно?
8. Сколько вариантов распределения трёх путёвок в один санаторий для семи претендентов возможно?
9. **Сколько** существует пятизначных симметричных чисел, которые одинаково читаются слева-направо и справа-налево?

Практическое занятие № 11

Решение задач по теории вероятности и математической статистике

Цель: Закрепить умение нахождения вероятности событий и решения задач математической статистики

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

1 Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

2 Дискретной случайной величиной (ДСВ) называют такую величину, множество значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.

3 Заданное соответствие между возможными значениями СВ и их вероятностями называется законом распределения случайной величины ; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

4 При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности. Эта таблица называется рядом распределения.

5 Ряд распределения можно представить графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения ДСВ, а по оси ординат - соответствующие вероятности. Соединив полученные точки отрезками, получим ломаную, называемую много- угольником распределения вероятностей

6 Функцией распределения случайной величины X (обозначается F(x)) назы-вается функция, определяемая соотношением $F(x) = P(X < x)$.

7 Математическое ожидание ДСВ X равно сумме произведений всех ее воз-можных значений на их вероятности, т.е. $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$

8 Дисперсией ДСВ X (D(X)) называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания, т.е. $D(X)=M(X-M(X))^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 P(x_i)$

9 Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется арифметический корень из дисперсии, т.е. $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Пример выполнения:

Исходные данные:

Приживаемость саженцев яблонь составляет 80%. Наудачу выбирают 5 саженцев. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев, функцию распределения, построить многоугольник распределения и график функции распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа прижившихся саженцев.

Решение:

1 Вероятность приживаемости яблони равна 0,8.

X – случайная величина числа прижившихся яблонь из пяти саженцев:

Возможные значения: $x1 = 0$ – ни один саженец не прижился;

$x2 = 1$ – один саженец прижился;

$x3 = 2$ – два прижились;

$x4 = 3$ – три;

$x5 = 4$ – четыре;

$x6 = 5$ – пять саженцев прижились.

2 Вероятности этих значений вычислим по формуле Бернулли:

$$P(x_1) = C_5^0 p^0 q^5 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}(0,8)^0(0,2)^5 = 0,00032$$

$$P(x_2) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}(0,8)^1(0,2)^4 = 5\cdot 0,8\cdot 0,0016 = 0,0064$$

$$P(x_3) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}(0,8)^2(0,2)^3 = 10\cdot 0,64\cdot 0,008 = 0,0512$$

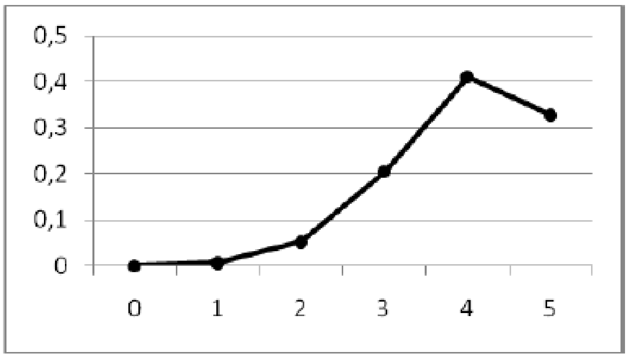
$$P(x_4) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}(0,8)^3(0,2)^2 = 10\cdot 0,512\cdot 0,04 = 0,2048$$

$$P(x_5) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}(0,8)^4(0,2)^1 = 5\cdot 0,4096\cdot 0,2 = 0,4096 \quad P(x_6) = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}(0,8)^5(0,2)^0 = 0,32768$$

Таким образом, закон распределения случайной величины:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Многоугольник распределения:



Вычислим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0; \quad \textit{если}\; x\le 0\\ 0{,}00032; \quad \textit{если}\; 0<x\le 1\\ 0{,}00032+0{,}0064=0{,}00672; \quad \textit{если}\; 1\le x<2\\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512=0{,}05792; \quad \textit{если}\; 2\le x<3\\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048=0{,}26272; \quad \textit{если}\; 3\le x<4\\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048+0{,}4096=0{,}67232; \quad \textit{если}\; 4\le x<5\\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048+0{,}4096+0{,}32768=1; \quad \textit{если}\; x\ge 5\end{cases}$$

Найдем числовые характеристики случайной величины, для этого составим таблицу:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768
X-M(X)	-4	-3	-2	-1	0	1
$(X\text{-}M(X))^2$	16	9	4	1	0	1

Мат. ожидание: $M(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i P(x_i)=$

$$=1\cdot 0{,}0064+2\cdot 0{,}0512+3\cdot 0{,}2048+4\cdot 0{,}4096+5\cdot 0{,}32768=4$$

Дисперсия: $D(X)=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^2 P(x_i)=$

$$=16\cdot 0.00032+9\cdot 0{,}0064+4\cdot 0{,}0512+1\cdot 0{,}2048+0\cdot 0{,}4096+1\cdot 0{,}32768=0{,}8$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}89$

Задания:

1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

3. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелок делает выстрелы до первого промаха. Составить закон распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку, если всего имеется пять патронов. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

4. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа гербов при четырех подбрасываниях монеты. Построить полигон полученного распределения.

5. Два носка выбираются случайным образом из ящика, в котором находится 5 коричневых и 3 зеленых. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа коричневых носков. Построить полигон полученного распределения.

6. В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных однотипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

7. В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных однотипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества кондиционных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

8. В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества дефектных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

9. В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества качественных

деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

10. В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

11. В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар имеется в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

12. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых белых шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

13. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

14. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

15. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

16. Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

17. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества качественных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

18. Дискретная случайная величина – число мальчиков в семьях с 5 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества мальчиков. Построить полигон полученного распределения.

19. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

20. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго – 0,4. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

21. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

22. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу не красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

23. Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Построить полигон полученного распределения.

24. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

25. В коробке имеются 10 карандашей, из которых 4 синие. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу синих карандашей. Построить полигон полученного распределения.

26. Дискретная случайная величина – число девочек в семьях с 4 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества девочек. Построить полигон полученного распределения.

27. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,6, для второго – 0,7. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

28. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,8 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

29 Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

30 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попада-ний мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

31 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попада-ний мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,7. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

Практическое занятие № 12

Применение численных методов при интегрировании, дифференцировании, решении дифференциальных уравнений

Цель: Закрепить и систематизировать знания по теме «Основные численные методы».

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.
Форма выполнения задания: кроссворд.
Пояснения к работе:
Методические рекомендации по составлению кроссвордов
В процессе работы необходимо:

- просмотреть и изучить необходимый материал, как в лекциях, так и в дополнительных источниках информации;
- составить список слов раздельно по направлениям;
- составить вопросы к отобранным словам;
- проверить орфографию текста, соответствие нумерации;
- оформить готовый кроссворд.

Общие требования при составлении кроссвордов:

- Не допускается наличие "плашек" (незаполненных клеток) в сетке кроссворда;
- Не допускаются случайные буквосочетания и пересечения;
- Загаданные слова должны быть именами существительными в именительном падеже единственного числа;
- Двухбуквенные слова должны иметь два пересечения;
- Трехбуквенные слова должны иметь не менее двух пересечений;
- Не допускаются аббревиатуры (ЗиЛ и т.д.), сокращения (детдом и др.);
- Не рекомендуется большое количество двухбуквенных слов;
- Все тексты должны быть написаны разборчиво, желательно отпечатаны.

Требования к оформлению:
На каждом листе должна быть фамилия автора, а также название данного кроссворда;
Рисунок кроссворда должен быть четким;
Сетки всех кроссвордов должны быть выполнены в двух экземплярах:
1-й экз. - с заполненными словами;
2-й экз. - только с цифрами позиций.
Ответы публикуются отдельно. Ответы предназначены для проверки правильности решения кроссворда и дают возможность ознакомиться с правильными ответами на нерешенные позиции условий, что способствует решению одной из основных задач разгадывания кроссвордов — повышению эрудиции и увеличению словарного запаса.
<u>Критерии оценивания составленных кроссвордов:</u>
Четкость изложения материала, полнота исследования темы;
Оригинальность составления кроссворда;
Практическая значимость работы;
Уровень стилевого изложения материала, отсутствие стилистических ошибок;
Уровень оформления работы, наличие или отсутствие грамматических и пунктуационных ошибок;
Количество вопросов в кроссворде, правильное их изложения.

Перечень рекомендуемой учебной литературы, информационных ресурсов сети Интернет соответствует пункту 3.2. рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01. Прикладная математика специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство