ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Петрозаводский филиал ПГУПС

ОДОБРЕНО
на заседании цикловой комиссии ЕЧ
протокол № 8 от 28 августа 2017 г.
Председатель цикловой комиссии:
Масайлова Т.А (_______)

УТВЕРЖДАЮ
Начальник УМО
__________ А.В. Калько
«28» 04 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению практических занятий

По учебной дисциплине: ЕН.01. Прикладная математика

Специальность: 27.02.03 Автоматика и телемеханика на транспорте (на железнодорожном транспорте)

Разработчик: Писаренко А.С.

2017 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации и проведению практических занятий разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01. Прикладная математика и предназначено для выполнения практических занятий обучающимися.

Практические занятия по учебной дисциплине направлены на усвоение знаний, освоение умений и формирование элементов общих и профессиональных компетенций, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

уметь:

применять математические методы для решения профессиональных задач;

решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел;

знать:

основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике

В результате освоения учебной дисциплины происходит поэтапное формирование элементов общих и профессиональных компетенций:

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Анализировать работу станционных, перегонных, микропроцессорных и диагностических систем автоматики по принципиальным схемам.

ПК 1.2. Определять и устранять отказы в работе станционных, перегонных, микропроцессорных и диагностических систем автоматики.

ПК 1.3. Выполнять требования по эксплуатации станционных, перегонных микропроцессорных и диагностических систем автоматики.

ПК 2.1. Обеспечивать техническое обслуживание устройств СЦБ и систем ЖАТ.

ПК 2.2. Выполнять работы по техническому обслуживанию устройств электропитания систем железнодорожной автоматики.

ПК 2.3. Выполнять работы по техническому обслуживанию линий железнодорожной автоматики.

ПК 2.4. Организовывать работу по обслуживанию, монтажу и наладке систем железнодорожной автоматики.

ПК 2.5. Определять экономическую эффективность применения устройств автоматики и методов их обслуживания.

ПК 2.6. Выполнять требования технической эксплуатации железных дорог и безопасности движения.

ПК 2.7. Составлять и анализировать монтажные схемы устройств СЦБ и ЖАТ по принципиальным схемам.

ПК 3.1. Производить разборку, сборку и регулировку приборов и устройств СЦБ.

ПК 3.2. Измерять и анализировать параметры приборов и устройств СЦБ.

ПК 3.3. Регулировать и проверять работу устройств и приборов СЦБ.

Рабочей программой предусмотрено выполнение обучающимися практических занятий, включая, как обязательный компонент практические задания с использованием персонального компьютера.

Распределение результатов освоения учебного материала в ходе выполнения заданий на практических занятиях происходит в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Распределение результатов освоения учебного материала

Раздел, тема	**Контрольно-оценочные мероприятия**	**Результаты**		**Поэтапно формируемые элементы общих и профессиональных компетенций**
		усвоенные знания	**освоенные умения**	
Раздел 1. Матрицы и определители				
Тема 1.1. Матрицы и определители	Практическое занятие №1 Вычисление определителей третьего и четвертого порядка Практическое занятие №2 Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера Практическое занятие №3 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональных задач;	ОК 9.
Раздел 2. Основы математического анализа				
Тема 2.1 Функции и их свойства	Практическое занятие № 4 Вычисления пределов с помощью замечательных пределов и раскрытие неопределённостей Практическое занятие № 5 Нахождение производных функций, нахождение неопределенных и вычисление определенных	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональных задач;	ОК 9.

	интегралов			
Тема 2.2 Графическое представление функций	Практическое занятие № 6 Построение графиков функций и их преобразований	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональных задач;	ОК 6.
Тема 2.3 Исследование функций	Практическое занятие № 7 Исследование функции. Исследование графика функции	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональных задач;	ОК 9.
Раздел 3 Комплексные числа				
Тема 3.2 . Действия с комплексными числами	Практическое занятие № 8 Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах Практическое занятие № 9 Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной функциям и обратно.	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел;	ОК 6.
Раздел 4. Алгебра логики				
Тема 4.1 Системы счисления в алгебре логике	Практическое занятие № 10 Перевод целых, дробных и смешанных чисел из одной системы счисления в другую	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональных задач;	ОК 6. ПК 2.5. ПК 1.2. ПК 1.3
Тема 4.2 Структура и форматы двоичных чисел	Практическое занятие № 11 Представление положительных и отрицательных двоичных чисел в прямом, обратном, дополнительном и модифицированном кодах.	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональных задач;	ПК 1.1. ПК 1.3. ПК 3.1.
Тема 4.3 Математические операции с двоичными числами	Практическое занятие № 12 Выполнение арифметических операций с многоразрядными двоичными числами, представленными в различных кодах.	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональных задач;	ПК 1.1. ПК 1.3. ПК 3.1.
Тема 4.4 Основные понятия алгебры логики	Практическое занятие № 13 Законы алгебры логики и базовые логические элементы	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональных задач;	ПК 1.2. ПК 1.3. ПК 3.2. ПК 3.3.

Тема 4.5 Канонические формы представления функций	Практическое занятие № 14 Построение СДНФ и СКНФ по таблице истинности	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональны х задач;	ПК 1.2. ПК 1.3. ПК 3.2. ПК 3.3.
Раздел 5 Основы теории вероятностей и математической статистики				
Тема 5.1 Элементы теории вероятности и математической статистики	Практическое занятие № 15 Составление закона распределения дискретной случайной величины. Вычисление математического ожидания и среднего квадратичного отклонения.	основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математике, теории вероятности и математической статистике	применять математические методы для решения профессиональны х задач;	ПК 2.1. – ПК 2.7.

Содержание практических занятий охватывает весь круг умений и компетенций, на формирование которых направлена учебная дисциплина.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1

Вычисление определителей третьего и четвертого порядка

Практическое занятие №2

Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера

Практическое занятие №3

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Практическое занятие № 4

Вычисления пределов с помощью замечательных пределов и раскрытие неопределённостей

Практическое занятие № 5

Нахождение производных функций, нахождение неопределенных и вычисление определенных интегралов

Практическое занятие № 6

Построение графиков функций и их преобразований

Практическое занятие № 7

Исследование функции. Исследование графика функции

Практическое занятие № 8

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Практическое занятие № 9

Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной функциям и обратно.

Практическое занятие № 10

Перевод целых, дробных и смешанных чисел из одной системы счисления в другую

Практическое занятие № 11

Представление положительных и отрицательных двоичных чисел в прямом, обратном, дополнительном и модифицированном кодах.

Практическое занятие № 12

Выполнение арифметических операций с многоразрядными двоичными числами, представленными в различных кодах.

Практическое занятие № 13

Законы алгебры логики и базовые логические элементы

Практическое занятие № 14

Построение СДНФ и СКНФ по таблице истинности

Практическое занятие № 15

Составление закона распределения дискретной случайной величины. Вычисление математического ожидания и среднего квадратичного отклонения.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

При оценке освоенных умений при выполнении практических работ применяется пятибалльная шкала оценивания.

Оценивание практических занятий производится в соответствии со следующими нормативными актами:

- Положение о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;

- Положение о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий.

Практическое занятие №1

Вычисление определителей третьего и четвертого порядка

Цель: Научиться вычислять определители третьего и четвертого порядка

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Определителем второго порядка называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определителем третьего порядка называется число, равное

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

.

Замечание. Чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое **правило треугольников** (правило Саррюса). Оно заключается в следующем. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются на главной диагонали и в вершинах треугольников, симметричных относительно главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «–», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали

Для вычисления определителей третьего порядка можно пользоваться ещё правилом «3 × 5». *Согласно этому правилу к заданной матрице(определителю)* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *добавляют ещё первые два столбца* $\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right.$.

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», *располагаются на главной диагонали и на отрезках, параллельных главной диагонали*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «–», *располагаются на побочной диагонали и на отрезках, параллельных побочной диагонали*

Определитель detA равен сумме указанных произведений элементов с учетом их знаков.

Вычислить определитель матрицы $A = \|a_{i,j}\|$ третьего порядка разложением по элементам первой строки.

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Задания:

№	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант
1	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 & 1 \\ 5 & -11 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 9 & 6 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -8 & 1 \\ 5 & 1 & -11 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & 2 & -11 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};$	$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix};$	$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

Практическое занятие №2

Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера

Цель: расширить представление о методах решения систем линейных уравнений (СЛУ) и отработать алгоритм решения СЛУ по правилу Крамера.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Решение систем уравнений через определители (Правило Крамера).

Пусть дана квадратная таблица из четырех чисел $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ (1)

Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется определителем второго порядка, соответствующего таблице (1). Этот определитель обозначается символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; соответственно имеем $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (2)

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются элементами определителя. Говорят, что элементы a_1, b_2 лежат на главной диагонали определителя Δ, a_2, b_1- на побочной. Таким образом, определитель второго порядка вычисляется как произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали. Например, $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot 4 - (-1)\cdot 2 = -10$

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = h_1 \\ a_2x + b_2y = h_2 \end{cases}$, (3) с двумя неизвестными x, y. Введем обозначения

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}$. (5)

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (4), называется определителем этой системы. Определитель Δ_x получается путем замены элементов первого столбца определителя свободными членами системы (4); определитель Δ_y - при помощи замены свободными членами системы (4) элементов его второго столбца.

Если $\Delta \neq 0$, то система (4) имеет единственное решение; оно определяется формулами $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. (6)

Если $\Delta = 0$ и при этом хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля, то система (4) совсем не имеет решений (как говорят, уравнения этой системы несовместны).

Если же $\Delta = 0$, но также $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система (4) имеет бесконечно много решений (в этом случае одно из уравнений системы есть следствие другого).

Пусть в уравнениях системы (4) $h_1 = h_2 = 0$; тогда система (4) будем иметь вид: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases}$ (6)

Система уравнений вида (7) называется однородной; она всегда имеет нулевое решение; x=0, y=0. Если $\Delta \neq 0$, то это решение является единственным; если же $\Delta = 0$, то система (7), кроме нулевого, имеет бесконечно много других решений.

Система трех линейных уравнений с тремя переменными.

Систему линейных уравнений с тремя переменными можно привести к виду

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \quad \textbf{(7)}$$

Индексы элементов системы (7) означают: первый- номер строки, а второй - номер столбца, где расположен этот элемент

Определителем третьего порядка *называется число, которое определяется по правилу:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}.$$

Правая часть выражения (1) состоит из алгебраической суммы шести членов, из которых три взяты со знаком плюс, а три - со знаком минус. Схематично правило раскрытия определителя можно представить так:

На левом рисунке схемы отмечены элементы, произведения которых берутся со знаком плюс, а на правом — со знаком минус.

Определитель третьего порядка обладает теми же свойствами, что и определитель второго порядка.

Пусть дана система (7) трех линейных уравнений с тремя переменными, определители которой равны:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Система (7) может быть решена следующим образом: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

1. Если $\Delta \neq 0$, а $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 > 0$, то система имеет единственное решение

2. Если $\Delta = 0$, а $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 > 0$, то система не имеет решений

3. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 = 0$, то система может иметь бесчисленное множество решений

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$

Решение. Составляем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 30$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5; \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 13; \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно,

$$x = \frac{5}{30} = 6; \ y = \frac{13}{30}; \ z = \frac{1}{30}$$

Задания:

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$	1) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10; \\ x + 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x + y + 3z = 3. \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -3; \\ x + 5y - z = -1; \\ 3x + y + 4z = 11. \end{cases}$
3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$	3) $\begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

Практическое занятие №3

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель: расширить представление о методах решения систем линейных уравнений (СЛУ) и отработать алгоритм решения СЛУ методом Гаусса.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения Метод Гаусса

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной. При преобразовывать не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:

а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 3 и 2:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

б) третью строку умножим на (-5) и прибавим к ней вторую:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}$$

В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду:
$$\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ -5y + 10z = -7 \\ -10z = 13 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $z = -1{,}3$. Подставляя это значение во второе уравнение, имеем $y = -1{,}2$. Далее из первого уравнения получим $x = -0{,}7$.

Задания:

№	1 вариант	2 вариант	3 вариант
1	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=7; \\ 2x_1-3x_2+x_3=3; \\ 4x_1+x_2-x_3=16. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-x_3=4; \\ 3x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 8x_1+7x_2+3x_3=18 \\ -7x_1-4x_2-4x_3=-11 \\ -6x_1+5x_2-4x_3=-15 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1 \\ 4x_1-3x_2+4x_3=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6; \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18; \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4; \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=-3; \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=8; \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=6; \\ -x_1+2x_2+3x_3+5x_4=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5; \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=1; \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=6; \\ 6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=1. \end{cases}$

Практическое занятие № 4

Вычисления пределов с помощью замечательных пределов и раскрытие неопределённостей

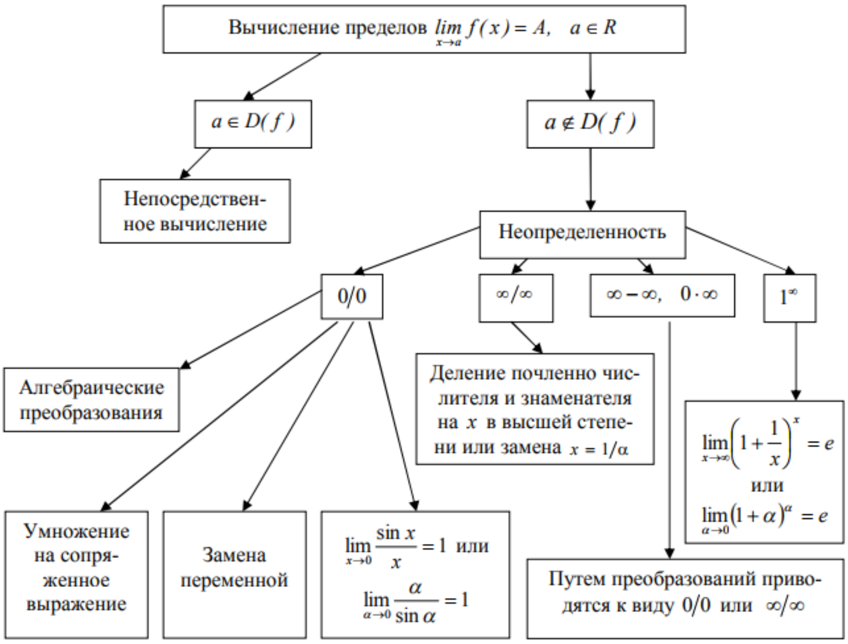
Цель:

- Научиться вычислять пределы с помощью замечательных пределов
- Научиться раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Способы вычисления пределов



Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданной отношением двух многочленов, существует два способа:

1) каждый член числителя и знаменателя необходимо разделить на x в наивысшей степени;

2) применить метод замены переменной: $x = \frac{1}{\alpha}$ (при $x \to \infty$ $\alpha \to 0$).

Пример Найти $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

1 способ: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{4}{x}} = \frac{2}{3}$,так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{4}{x}$ стремится к нулю.

а) Дробно-рациональные функции. В этом случае: в числителе и знаменателе выделяется множитель $(x-a)$ и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель;

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Применим способ группировки слагаемых в числителе и знаменателе дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

б) Дробно-иррациональные функции. Для избавления от неопределенности в этом случае существует два способа:

1) умножение числителя и знаменателя дроби на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

2) метод замены переменной.

В результате таких преобразований удается свести данный случай к уже рассмотренному в предыдущем пункте.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}x=t^6,\ \sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2,\\ x\to 1\Rightarrow t\to 1\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

в) Пределы от функций, в которых участвуют *тригонометрические выражения*, обычно сводятся к *первому замечательному пределу.*

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, называется *первым замечательным пределом*. Этот предел равен единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{, или }\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1 \qquad (3)$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

Применяя формулу для косинуса двойного угла: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2.$$

Иногда с помощью тригонометрических преобразований неопределенность приводится к непосредственному вычислению предела.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{tgx}{\sin 2x}$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{tgx}{\sin 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2\sin x\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\sin x}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$

Задания:

	1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$	**1, 4, 7, 10, 13**	**2, 5, 8, 11, 14**	**3, 6, 9, 12, 15**
неопределенности вида $\frac{0}{0}$	**1, 4, 7, 10, 13**	**2, 5, 8, 11, 14**	**3, 6, 9, 12, 15**

1.) неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+x}{4x^4+x^2+5}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$. 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{7x+\sqrt[3]{x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3}{\sqrt{x^6+2x-3}}$. 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+x+5}{x^3-5}$. 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-x+7}{3x^2+1}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}+8}{x^2+5x-6}$. 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^5-x^2+1}{x^6+x^3+x}$. 15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-3x+4}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$.

2.) неопределенности вида $\frac{0}{0}$

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$. 5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{2x^2-x-1}$. 6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt{x-5}-3}{x^2-256}$. 8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$. 9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$. 11. $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$. 12. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$. 14. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.. 15. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$.

Практическое занятие № 5

Нахождение производных функций, нахождение неопределенных и вычисление определенных интегралов

Цель:

- Закрепить умение находить производные функций и неопределенных интегралов;
- Отработать навыки вычисления определенных интегралов.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ПРОИЗВОДНАЯ

Производные элементарных функций

1. $(C)'=0$	2. $(x)'=1$	3. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	4. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	5. $\left(e^x\right)'=e^x$
6 $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$	7. $\left(\ln x=\frac{1}{x}\right)$	8. $(\sin x)'=\cos x$	9. $(\cos x)'=-\sin x$	10. $tgx'=\frac{1}{\cos^2 x}$
11. $ctgx'=-\frac{1}{\cos^2 x}$	12.$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	13/$(arcctgx)'=\frac{-1}{1+x^2}$	14.$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15.$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования:

1. $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x);\ \left(f(x)-g(x)\right)'=f'(x)-g'(x)$
2. $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $(kf(x))'=kf'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Производная сложной функции: $f(\varphi(x))'=f'(u)(\varphi'(x))$

Исследование функции

Рассмотрим последовательность выполнения операций при исследовании функции и построении ее графика на следующем примере.

Пример. Исследуйте функцию и постройте ее график $y=x\sqrt{x}-6x$

Решение.

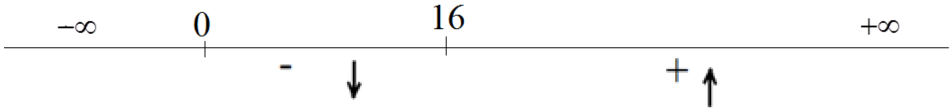
1) Область определения. $x\in[0,+\infty)$

2) Функция не периодическая.

3) Функция общего свойства, то есть не относится ни к четным, ни к нечетным, так как $y(-x)\neq y(x);\ y(-x)\neq -y(x)..$

3) Области возрастания-убывания.

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}-6;\quad \frac{3}{2}\sqrt{x}-6x=0;\ \frac{9}{4}x=36;\ 9x=144;\ x=16;\ x-16=0$$



$x \in (0;16)$ - функция убывает; $x \in (16;+\infty)$ - функция возрастает

4) Точки экстремумов: при переходе через $x = 16$ первая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно при $x = 16$ имеем минимум. Для определения значения этого минимума подставим $x = 16$ в уравнение кривой:

$y(16) = 16\sqrt{16} - 6 \cdot 16 = 64 - 96 = -32.$ Таким образом, у графика функции имеется точка минимума с координатами (16; -32).

5) Точки пересечения с осями координат.

Для определения ординаты точки пересечения с осью Oy подставим в уравнение кривой $x = 0$. В результате получим: $y(0) = 0\sqrt{0} - 6 \cdot 0 = 0$.

Таким образом, график функции пересекает ось Oy при $y = 0$.

Для определения абсциссы точки пересечения с осью Ox подставим в уравнение кривой $y = 0$. В результате получим:

$$0 = x\sqrt{x} - 6x; \quad x(\sqrt{x} - 6) = 0; \quad x_1 = 0; \quad \sqrt{x} - 6 = 0; \quad x_2 = 36.$$

Таким образом, график функции пересекает ось Ox в двух точках: при $x = 0$ и $x = 36$.

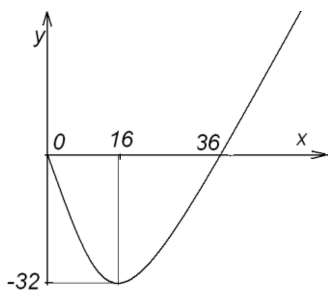
6) Области выпуклости-вогнутости.

Для определения участков вогнутости решаем неравенство: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} > 0$. Оно справедливо для любого x из области определения. Следовательно, график функции всюду вогнут.

Для определения участков выпуклости решаем неравенство: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} < 0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет участков выпуклости.

7) Точки перегиба:

Для определения точек перегиба решаем уравнение: $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} = 0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.



8) Для построения графика функции начертим оси координат и отметим выявленные нами точки: минимума (16;-32) и пересечения с осями координат (0;0) и (36;0), а также области возрастания-убывания функции и ее вогнутости. В результате получим график, изображённый на рисунке.

Применение производной в геометрии

Производная функции $y = f(x)$ *в* некоторой точке x_0 численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке (x_0, y_0).

Касательной к графику функции $y = f(x)$*, дифференцируемой в точке* x_0*, называется прямая, проходящая через точку* $(x_0, f(x_0))$ *и имеющая угловой коэффициент* $k = f'(x_0)$.

При названных условиях уравнение касательной имеет следующий вид:

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$$

Механический смысл производной.

Если закон прямолинейного движения точки задан уравнением $s = f(t)$, где s- путь; t - время, то мгновенная скорость движения vв момент t определяется равенствами

$$v = f'(t) = s',$$

т. е. скорость точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от пути s по времени.

Ускорение точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от скоростиv по времени или вторая производная от пути s по времени.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первообразная. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ *называется* ***первообразной*** *для функции* $f(x)$ *на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка существует производная* ***F'(x)****, равная* $f(x)$*, т. е.* $F'(x) = f(x)$**.**

Множество первообразных для данной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования; С - константа.

Неопределенные интегралы элементарных функций

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2} \right\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

Методы интегрирования

Ниже перечислены основные свойства интегралов.

1. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx \quad (3.3)$$

2. *Интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов:*

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \quad (3.4)$$

3. *Вид интеграла не зависит от вида переменной интегрирования:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(dx)] + C. \quad (3.5)$$

или, что тоже самое,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(dx)] + C,$$

где $\varphi(x)$ *- функция, непрерывная вместе со своей производной.*

Рассмотрим основные методы интегрирования:

I. ***Непосредственное интегрирование.***

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример. Найти $\int \left(4x^3 - 15x^2 + 14x - 3\right)dx$

Решение. Воспользуемся свойством 2. интеграла: интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих же функций.

$$\int(4x^3-15x^2+14x-3)dx=\int 4x^3dx-\int 15x^2dx+\int 14xdx-\int 3dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-15\frac{x^3}{3}+14\frac{x^2}{2}-3x+C=$$
$$=x^4-5x^3+7x^2-3x+C$$

II. ***Метод подстановки*.**

Этот метод называют также *методом замены переменной.* Использование этого метода основано на свойстве 3 интеграла. Его следует применять, когда интеграл не привести к табличному виду с помощью тождественных преобразований, и в то же время можно привести к табличному виду с помощью замены переменных.

Пример. Найти $\int(2+x)^7dx$

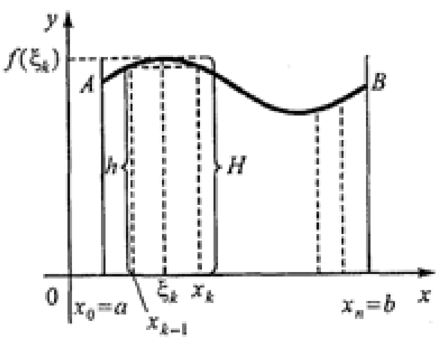
Решение. Введем новую переменную: $2+x=t;\ x=t-2;\ dx=dt$. Найдем интеграл:

$\int(2+x)^7dx=\int t^7dt=\dfrac{t^8}{8}+C$ Выразим результат через первоначальный аргумент:

$$\int(2+x)^7dx=\frac{(2+x)^8}{8}+C$$

Определенный интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции. *Дана плоская фигура, ограниченная графиком функции* $y=f(x)>0$ *и отрезками прямых* $y=0,\ x=a,\ x=b$. *Функция* $y=f(x)$ *определена, не*прерывна и неотрицательна в промежутке $[a,b]$. Вычислить площадь S полученной фигуры $aABb$, называемой *криволинейной трапецией.*



Определение. *Предел* $S=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ *называют* **определенным интегралом** *от функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a,\ b]$ *и обозначают* $\int_a^b f(x)dx$ *т. е.*

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

Число a *называется* **нижним пределом** *интеграла,* b**-верхним**.

Промежуток $[a,\ b]$ *называется* **промежутком интегрирования**, x**-переменной интегрирования.**

Теорема. *Определенный интеграл функции* $f(x)$, *непрерывной на промежутке [a, b], равен разности значений любой ее первообразной в точках* b *и* a

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad \textit{формулы Ньютона-Лейбница.}$$

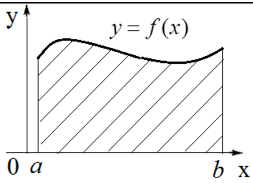
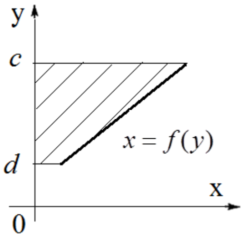
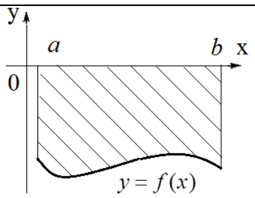
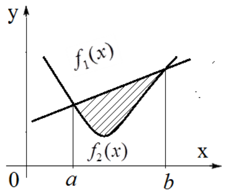
Пример. Вычислить $\int\limits_{-2}^{3}xdx$

Решение. Находим неопределенный интеграл: $\int\limits_{-2}^{3}xdx=\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}$ Найдя значение $\dfrac{x^2}{2}$ сначала при $x=3$, а затем при $x=-2$, вычислим разность:

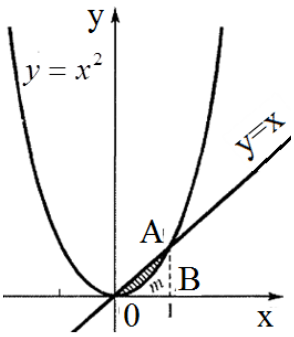
$$\int_{-2}^{3}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}=\frac{3^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=\frac{9-4}{2}=2{,}5$$

Площади плоских фигур и объемы тел вращения

Формулы для вычисления площади плоской фигуры.

Тип условия задачи	Чертеж	Формула
1		$S=\int\limits_a^b f(x)dx$
2		$S=\int\limits_d^c f(y)dy$
3		$S=-\int\limits_a^b f(x)dx$
4		$S=\int\limits_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную графиками функций: $y=x^2;\ y=x$



Решение.Построим графики данных функций, найдя прежде точки их пересечения путем решения системы: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$.Решив эту систему, получим точки O(0; 0) и A(1; 1).

В данном случае подходит тип условия 4 задачи.

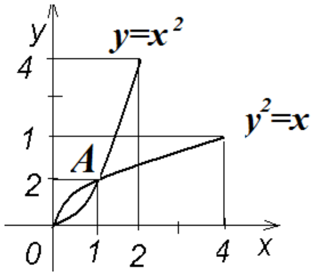
$$S=\int\limits_0^1 (x-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ кв.ед.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная линией $y=f(x)\geq 0$ ***и прямыми*** $y=0;\ x=a;\ x=b$***, вращается вокруг оси х, то объем тела вращения вычисляется по формуле:***

$$V=\pi\int\limits_a^b y^2dx$$

Если фигура, ограниченная линиями $y_1 = f_1(x) \ge 0$ ***и*** $y_2 = f_2(x) \ge 0$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ ***прямыми*** $x = a;\ x = b$, ***вращается вокруг оси*** Ox, ***то объем тела вращения вычисляется по формуле:*** $V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$

Пример. Найдите объем тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями: $y^2 = x;\ y = x^2$



Решение. Определим координаты точки пересечения этих линий из системы:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases};\ y^4 = y;\ y(y^3 - 1) = 0;\ y_1 = 0;\ y_2 = 1;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1.$$

Таким образом, имеем две точки пересечения линий: $O(0;0),\ A(1;1)$. По формуле имеем:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \pi \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi (куб.ед.).$$

Приложения определенного интеграла в механике

Путь, пройденный телом при неравномерном движении за время $t_2 - t_1$, **вычисляется по формуле:** $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt,\ f(t) = v$.

Пример. Скорость движения материальной точки задана уравнением $v = 9t^2 - 8t,\ м/с$. Определить ее путь за четвертую секунду.

Решение. $t_1 = 3с, \quad t_2 = 4с$

$$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t) dt = (3t^3 - 4t^2) \Big|_3^4 = (3 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2) - (3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2) = 128 - 45 = 83м.$$

Ответ *83 м*.

Пример. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2 м/с$. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение Скорость движения тела равна пулю в моменты начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно *t*:

$$12t - 3t^2 = 0;\ 3t(4 - t) = 0;\ t_1 = 0;\ t_2 = 4\ \ t_1, t_2$$ - пределы интегрирования.

$$S = \int_0^4 (12t - 3t^2) dt = (6t^2 - t^3) \Big|_0^4 = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 32м$$ **Ответ.** *S = 32 м.*

Задания:

Вариант 1

1. Найдите производные: $y=\left(\cos x+x^2\right)\cdot x^4$ и $y=\sin\left(x^3-x^2\right)$.
2. Для функции $f(x)=3x-2tgx$ найдите $f'(0)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2-6x+5$ в точке $x_0=4$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 4с, если $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2-3$.
5. Найдите значение точки максимум x_0 для функции $y=-x^3-12x^2-36x+11$.
6. Найдите неопределенные интегралы:
   - $\int\left(5x^7+2\right)dx$
   - $\int\left(5^x-\frac{1}{x}\right)dx$
   - $\int(6x-5)^4\,dx$
   - $\int\frac{dx}{\cos^2 6x}$
7. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int\limits_{-2}^{2}5x^4dx$ и $\int\limits_{4}^{25}\frac{3}{\sqrt{x}}dx$.
8. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int\limits_{1}^{2}(4x-3)^3\,dx$.
9. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V=8t+1$.
10. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=x^3$; $x=2$; $x=4$ и $y=0$.

Вариант 2

1. Найдите производные: $y=\left(x^2+5x\right)\cdot e^x$ и $y=\left(x^2+7x-1\right)^3$.
2. Для функции $f(x)=10x+3\cos x$ найдите $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=2x^2-5x-3$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 5с, если $S=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2$.
5. Найдите значение точки максимум x_0 для функции $y=x^3-12x^2+45x-5$.
6. Найдите неопределенные интегралы:
   - $\int(8\sin x+3)dx$

- $\int\left(3^x+\frac{1}{x}\right)dx$
- $\int(4-5x)^6\,dx$
- $\int e^{2x+8}dx$

7. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-2}^{1}12x^3dx$ и $\int_{9}^{16}\frac{2}{\sqrt{x}}dx$.
8. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2}(5x-4)^2\,dx$.
9. Найдите путь, пройденный телом за 4 секунды, если его скорость определяется формулой: $V=t+6$.
10. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=9x^2$; $x=2$; $x=3$ и $y=0$.

Вариант 3

1. Найдите производные: $y=\left(\sin x+3x^2\right)\cdot x^5$ и $y=\left(4x^2-2x+1\right)^3$.
2. Для функции $f(x)=2e^x+4x$ найдите $f'(0)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2+6x+8$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 3с, если $S=2t^3-5t^2+6$.
5. Найдите значение точки минимум x_0 для функции $y=-x^3+12x^2-21x+12$.
6. Найдите неопределенные интегралы:
   - $\int(6\cos x-2)dx$
   - $\int\left(\frac{1}{x}-2^x\right)dx$
   - $\int(7-3x)^5\,dx$
   - $\int\frac{dx}{\cos^2 8x}$
7. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-1}^{2}16x^3dx$ и $\int_{1}^{4}\frac{4}{\sqrt{x}}dx$.
8. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2}(4x-2)^2\,dx$.

9. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V = 2t + 3$.
10. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = x^2$; $x = 3$; $x = 6$ и $y = 0$.

Вариант 4

1. Найдите производные: $y = (x - \cos x) \cdot \sin x$ и $y = (x^2 + 3x + 5)^5$.
2. Для функции $f(x) = 9\sin x + 14x$ найдите $f'(\pi)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y = x^2 + 2x - 8$ в точке $x_0 = 2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 2с, если $S = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 3$.
5. Найдите значение точки минимум x_0 для функции $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 7$.
6. Найдите неопределенные интегралы:
   - $\int \left(4 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$
   - $\int \left(\frac{1}{x} - 7^x\right) dx$
   - $\int (4x - 3)^7 \, dx$
   - $\int e^{4x-7} dx$
7. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-3}^{1} 8x^3 dx$ и $\int_1^9 \frac{5}{\sqrt{x}} dx$.
8. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_1^2 (6x - 5)^2 dx$.
9. Найдите путь, пройденный телом за 3 секунды, если его скорость определяется формулой: $V = 10t - 8$.
10. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = 4x^3$; $x = 1$; $x = 2$ и $y = 0$.

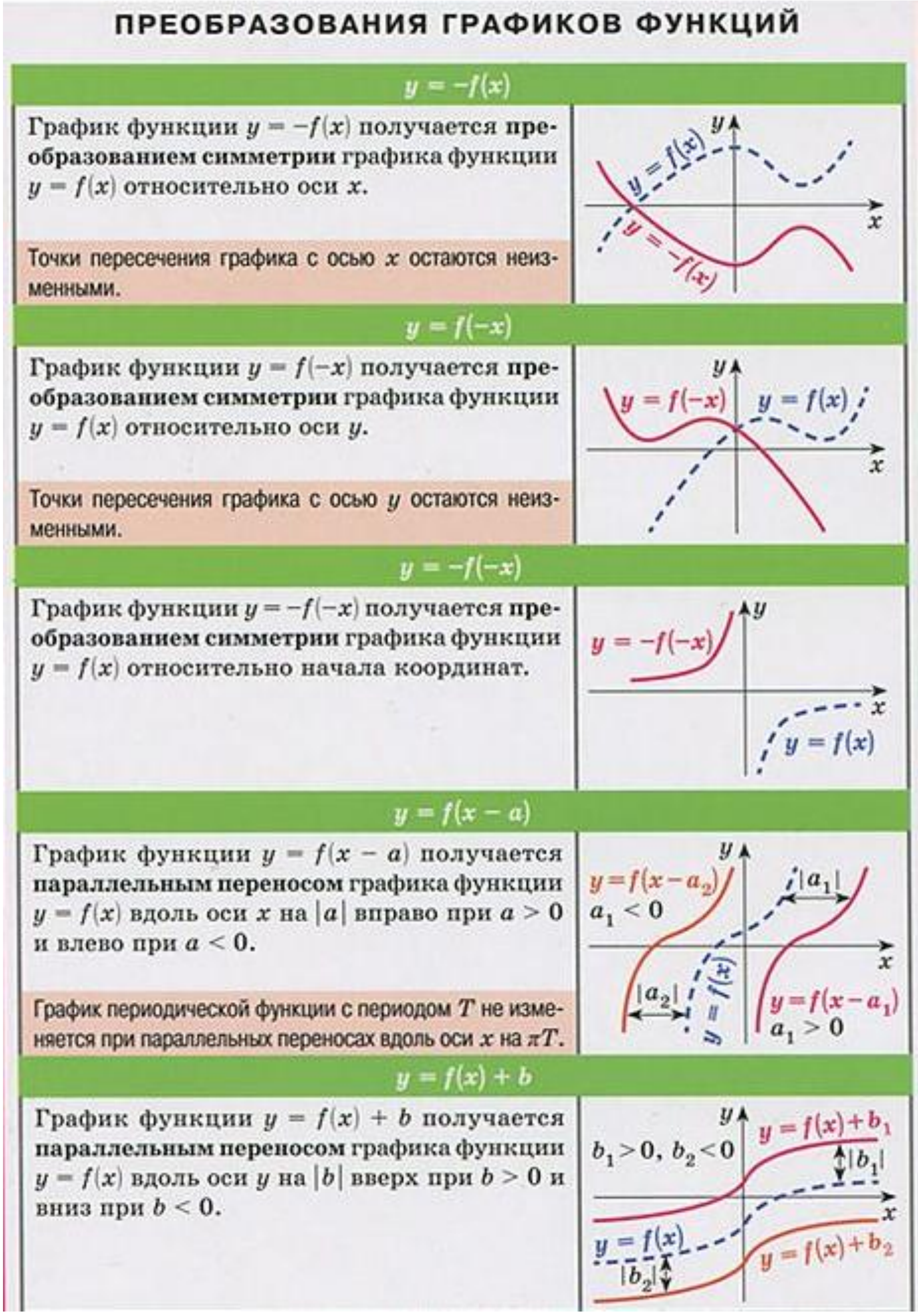
<u>Практическое занятие № 6</u>

Построение графиков функций и их преобразований

Цель: Закрепить умение построения графиков и их преобразований

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения



Задания:

Вариант 1

1. $y = x \quad y = 2x - 4 \quad y = -5x - 2$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 + 5 \quad y = x^2 - 8x + 12$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{3x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\frac{1}{2}$
5. $y = 7^x \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
6. $y = \log_2 x \quad u = \log_{\frac{1}{6}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 2

1. $y = x \quad y = 5x - 1 \quad y = -6x - 3$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 + 2 \quad y = x^2 - 10x + 24$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{13}{x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\frac{1}{2}$
5. $y = 6^x \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
6. $y = \log_9 x \quad u = \log_{\frac{1}{4}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 3

1. $y = x \quad y = 2x + 5 \quad y = -4x + 2$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 + 6 \quad y = x^2 - 6x + 5$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{3x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\frac{1}{2}$
5. $y = 5^x \quad y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$
6. $y = \log_8 x \quad u = \log_{\frac{1}{3}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 4

1. $y = x \quad y = 2x - 5 \quad y = -6x + 3$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 - 4 \quad y = x^2 - 2x - 15$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\frac{1}{2}$
5. $y = 10^x \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
6. $y = \log_3 x \quad u = \log_{\frac{1}{9}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 5

1. $y = x \quad y = 3x + 4 \quad y = -4x + 3$
2. $y = x^2 \quad y = 2x^2 \quad y = x^2 + 6x + 8$
3. $y = \dfrac{1}{x} \quad y = -\dfrac{1}{2x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\dfrac{1}{2}$
5. $y = 9^x \quad y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$
6. $y = \log_4 x \quad u = \log_{\frac{1}{8}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 6

1. $y = x \quad y = 4x + 3 \quad y = -5x + 2$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 - 5 \quad y = x^2 - 4x - 21$
3. $y = \dfrac{1}{x} \quad y = -\dfrac{1}{5x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\dfrac{1}{2}$
5. $y = 3^x \quad y = \left(\dfrac{1}{8}\right)^x$
6. $y = \log_6 x \quad u = \log_{\frac{1}{10}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 7

1. $y = x \quad y = 3x - 4 \quad y = -4x - 3$
2. $y = x^2 \quad y = \dfrac{1}{3}x^2 \quad y = x^2 + 2x - 3$
3. $y = \dfrac{1}{x} \quad y = \dfrac{1}{6x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\dfrac{1}{2}$
5. $y = 2^x \quad y = \left(\dfrac{1}{10}\right)^x$
6. $y = \log_5 x \quad u = \log_{\frac{1}{7}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 8

1. $y = x \quad y = 4x - 3 \quad y = -x - 6$
2. $y = x^2 \quad y = 3x^2 \quad y = x^2 - 8x + 15$
3. $y = \dfrac{1}{x} \quad y = \dfrac{1}{2x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\dfrac{1}{2}$
5. $y = 4^x \quad y = \left(\dfrac{1}{7}\right)^x$
6. $y = \log_7 x \quad u = \log_{\frac{1}{5}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 8

1. $y = x \quad y = 5x + 2 \quad y = -3x + 4$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 + 1 \quad y = x^2 + 10x + 24$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{6x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 8^x \quad y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
6. $y = \lg x \quad u = \log_{\frac{1}{2}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 9

1. $y = x \quad y = 6x + 1 \quad y = -5x + 1$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 + 3 \quad y = x^2 + 4x - 21$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{4x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 9^x \quad y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
6. $y = \log_2 x \quad u = \log_{\frac{1}{7}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 10

1. $y = x \quad y = 5x - 2 \quad y = -4x - 3$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 - 1 \quad y = x^2 + 8x + 12$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{5x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 4^x \quad y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$
6. $y = \log_9 x \quad u = \log_{\frac{1}{4}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 11

1. $y = x \quad y = 6x - 1 \quad y = -3x + 4$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 - 3 \quad y = x^2 + 6x + 5$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{4x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 5^x \quad y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$
6. $y = \log_3 x \quad u = \log_{\frac{1}{9}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 12

1. $y = x \quad y = x + 6 \quad y = -3x - 4$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 + 4 \quad y = x^2 + 8x + 15$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{2x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 3^x \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$
6. $y = \log_4 x \quad u = \log_{\frac{1}{10}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 13

1. $y = x \quad y = 2x + 4 \quad y = -3x - 3$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 - 5 \quad y = x^2 + 2x - 15$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{2x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 6^x \quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
6. $y = \log_6 x \quad u = \log_{\frac{1}{3}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 14

1. $y = x \quad y = x - 6 \quad y = -3x + 3$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 - 5 \quad y = x^2 - 6x + 8$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{4x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 2^x \quad y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$
6. $y = \log_5 x \quad u = \log_{\frac{1}{8}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 15

1. $y = x \quad y = 4x + 2 \quad y = -x - 6$
2. $y = x^2 \quad y = 4x^2 \quad y = x^2 - 2x - 8$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{3x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 7^x \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
6. $y = \log_7 x \quad u = \log_{\frac{1}{2}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 16

1. $y = x \quad y = 4x - 2 \quad y = -2x + 4$
2. $y = x^2 \quad y = \frac{1}{2}x^2 \quad y = x^2 + 2x - 8$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{3x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\frac{1}{2}$
5. $y = 8^x \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
6. $y = \log_8 x \quad u = \log_{\frac{1}{6}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 17

1. $y = x \quad y = 3x - 3 \quad y = -6x + 1$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 - 3 \quad y = x^2 + 8x + 15$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{4x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\frac{1}{2}$
5. $y = 2^x \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$
6. $y = \log_7 x \quad u = \log_{\frac{1}{5}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 18

1. $y = x \quad y = 3x + 3 \quad y = -4x - 2$
2. $y = x^2 \quad y = \frac{1}{4}x^2 \quad y = x^2 - 2x - 3$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{4}{x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\frac{1}{2}$
5. $y = 10^x \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
6. $y = \lg x \quad u = \log_{\frac{1}{5}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 19

1. $y = x \quad y = 3x + 4 \quad y = -2x - 4$
2. $y = x^2 \quad y = x^2 - 6 \quad y = x^2 - 4x - 21$
3. $y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{2}{3x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2,3,-2,-3,\frac{1}{2}$
5. $y = 8^x \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
6. $y = \log_4 x \quad u = \log_{\frac{1}{7}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 20

1. $y = x$ $y = 3x - 4$ $y = -6x - 1$
2. $y = x^2$ $y = 3x^2$ $y = x^2 - 2x - 15$
3. $y = \frac{1}{x}$ $y = \frac{1}{5x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 3^x$ $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$
6. $y = \log_5 x$ $u = \log_{\frac{1}{8}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 21

1. $y = x$ $y = 4x - 3$ $y = -2x - 5$
2. $y = x^2$ $y = x^2 - 4$ $y = x^2 + 6x + 8$
3. $y = \frac{1}{x}$ $y = \frac{1}{6x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 5^x$ $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$
6. $y = \log_6 x$ $u = \log_{\frac{1}{2}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 22

1. $y = x$ $y = 4x + 3$ $y = -2x + 5$
2. $y = x^2$ $y = x^2 + 6$ $y = x^2 - 2x - 3$
3. $y = \frac{1}{x}$ $y = -\frac{1}{5x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 4^x$ $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$
6. $y = \log_3 x$ $u = \log_{\frac{1}{9}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 23

1. $y = x$ $y = 6x - 3$ $y = -3x - 4$
2. $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = x^2 - 6x + 5$
3. $y = \frac{1}{x}$ $y = -\frac{1}{6x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 6^x$ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
6. $y = \log_8 x$ $u = \log_{\frac{1}{3}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Вариант 24

1. $y = x \qquad y = 6x + 3 \qquad y = -4x + 3$
2. $y = x^2 \qquad y = x^2 + 2 \qquad y = x^2 + 4x - 21$
3. $y = \frac{1}{x} \qquad y = -\frac{1}{2x}$
4. $y = x^a$, при $a = 2, 3, -2, -3, \frac{1}{2}$
5. $y = 7^x \qquad y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
6. $y = \log_9 x \qquad u = \log_{\frac{1}{4}} x$
7. 4 тригонометрические функции
8. 4 обратные тригонометрические функции

Практическое занятие № 7

Исследование функции. Исследование графика функции

Цель: Научиться применять производную при исследовании функции

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения
Пример 1.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0;\ 3]$.
Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует):
$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$
$y' = 0$ при $x = 1 \in [0;\ 3]$ и $x = -1 \notin [0;\ 3]$
Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка
$y(1) = 2;\ \ y(0) = 0;\ y(3) = -18$
Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.
Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{наиб}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{наим}(3) = -18$.
Пример 2.

Исследовать функцию $y = \dfrac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Общая схема исследования функций:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.
3. Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x - 1 = 0,\ (x = 1)$
   Область определения: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$
2. Т.к. $x = 1$- точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x=1$ точка разрыва второго рода.
Следовательно, прямая $x=1$- вертикальная асимптота.

1. Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y=f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:
   1. Область определения симметрична относительно начала координат
   2. $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$.

Если $y=f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x)=\frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2}=-\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.
Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с OX: $y=0$ при $x=-2$;

с OY: $x=0$ при $y=2$;

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y<0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}<0 \Rightarrow x+2<0 \Rightarrow x\in(-\infty;\,-2);$$

$$y>0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}>0 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x\in(-2;1)\cup(1;+\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{4};$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4}x\right]=\left[\infty-\infty\right]=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=2$$

$$y=\frac{1}{4}x+2-\text{наклонная асимптота.}$$

Для $x\to-\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y'>0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y'<0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y=f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с “+” на “-” при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с “-” на “+” при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0, в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$y' = 0$ при $x_1 = -2,\ x_2 = 7;$

y' не существует при $x = 1$

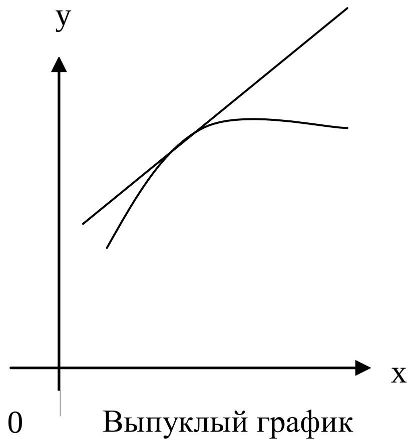
Составим таблицу

x	$(-\infty;\,-2)$	-2	$(-2;\,1)$	1	$(1;\,7)$	7	$(7;\,+\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	не существует	$\searrow$	≈ 5	$\nearrow$
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

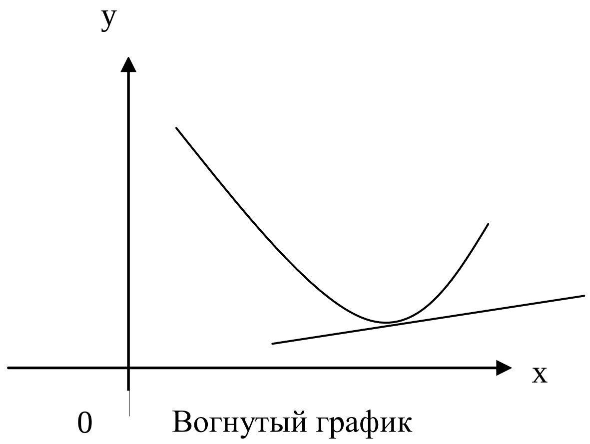
Функция возрастает на интервалах $(-\infty;\,-2)$, $(-2;\,1)$, $(7;\,+\infty)$ и убывает на интервале $(1;\,7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \dfrac{729}{144}$

7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Напомним, что график функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a;\,b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной. График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a;\,b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Выпуклый график



Вогнутый график

Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a;\,b)$, то график функции является выпуклым $(\cap)$ на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a;\,b)$ график вогнутый $(\cup)$.

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y'' = \frac{\left[2(x+2)(x-7)+(x+2)^2\right](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

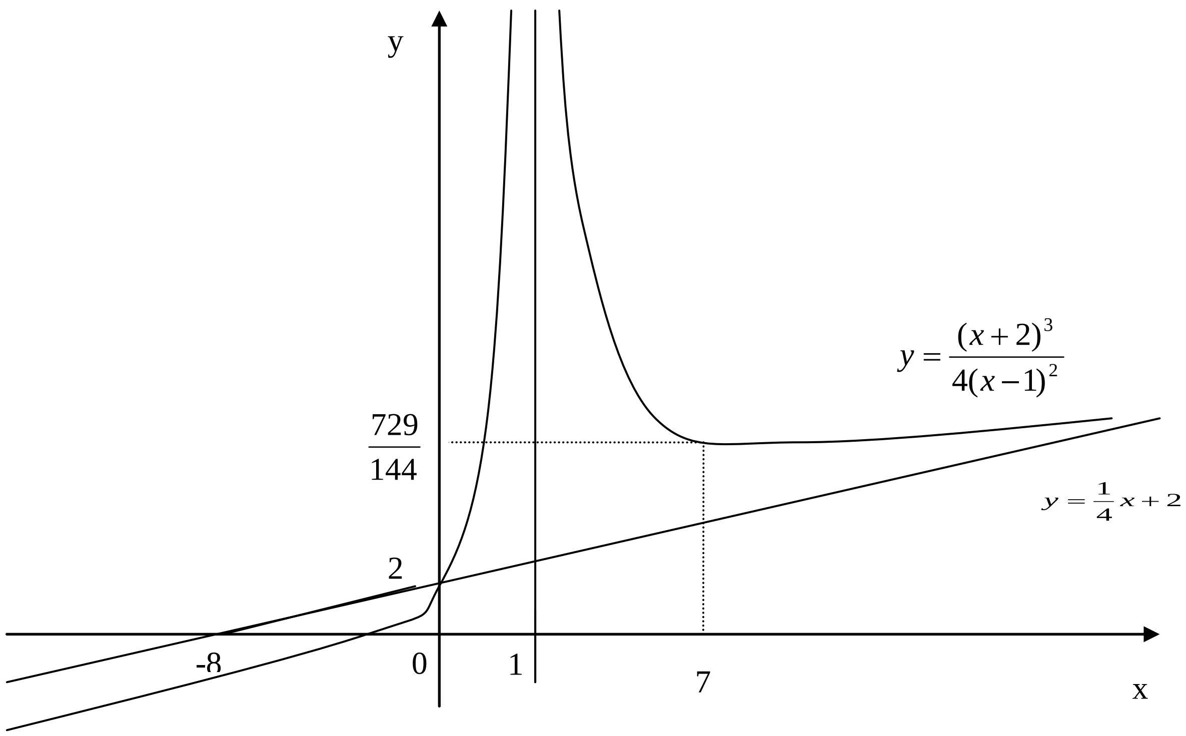
$y'' = 0$ при $x = -2$

y'' не существует при $x = 1$

Составим таблицу

x	$(-\infty;\,-2)$	-2	$(-2;\,1)$	1	$(1;\,+\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2;\,0)$- точка перегиба.
Дополнительные точки:
$y(-3) \approx -0{,}01$
$y(3) \approx 7{,}8$
$y(-6) \approx -0{,}3$
8. Построим график функции, используя результаты исследования.



Замечание:
При построении графика масштабы по оси OX и OY могут не совпадать.

Задания:

Вариант 1

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=\frac{x+6}{x^2+13}$; $[-5;5]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x}{(x-1)^2}$

Вариант 2

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=\frac{x}{2}+\cos x$; $[0;\pi]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x^3+16}{x}$

Вариант 3

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=\frac{x-3}{x^2+16}$; $[-5;10]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x^3-1}{4x^2}$

Вариант 4

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=\frac{x+3}{x^2+7}$; $[-3;7]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$

Вариант 5

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=\frac{x}{2}-\sin x$; $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$

Вариант 6

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

   $y=\frac{x}{x^2+16}$; $[-3;7]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

   $y=\frac{x^2+1}{x}$

Вариант 7

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} - \cos x;\ [-\pi; \pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

Вариант 8

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x-4}{x^2+6};\ [-4; 6]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{4x^2}{x^3-1}$$

Вариант 9

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \cos x;\ [-\pi; \pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{3+x^2}$$

Вариант 10

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \cos x - \frac{x}{\sqrt{2}};\ \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x}{1+x^2}$$

Вариант 11

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = 3x + x^3 - 1 - 3x^2;\ [-1; 2]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3+3}{x}$$

Вариант 12

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = x^2 e^{-x} + \sqrt{3};\ [-1; 4]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2+4}{x}$$

Вариант 13

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=\frac{1}{2}+x^5-\frac{5}{3}x^3$; [0;2]

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$

Вариант 14

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=\frac{x^2}{1+x}-\sqrt{2}$; $[-\frac{1}{2};4]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x}{x^2+5}$

Вариант 15

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=2x^2-\ln x+\frac{1}{2}$; $[\frac{1}{4};1]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{2x-8}{(x-3)^3}$

Вариант 16

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=1-2x^2+x^4$; $[-2;0]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{2x}{(x-2)^2}$

Вариант 17

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=\sin 2x-x-2$; $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x^4}{x^3-1}$

Вариант 18

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y=x^3-3x^2-9x+3$; $[-2;3]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y=\frac{x+3}{2(x+2)^2}$

Вариант 19

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$; $[0;2]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = \frac{2x}{x^2+1}$

Вариант 20

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = 3x^4 + 16x^3 + 9$; $[-3;1]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = \frac{16x^2}{x-4}$

Вариант 21

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = x + \frac{1}{x^2}$; $[1;20]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$

Вариант 22

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = \sin 2x - x$; $[0;\pi]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{x}{3-x^2}$

Вариант 23

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = \frac{x-1}{x^2+3}$; $[-3;3]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{x}{x^2+2}$

Вариант 24

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = \sqrt{3}x - 2\sin x$; $[0;\pi]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{x^3}{3-x}$

Вариант 25

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = \sin x - \frac{x}{2}; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{x}{3 + x^2}$

Вариант 26

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = \frac{1 - x}{1 + x}; \ [-1; 1]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{2x^3}{x - 2}$

Вариант 27

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = \frac{x}{2} - \sin x; \ [-\pi; \pi]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$

Вариант 28

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = \frac{x + 4}{x^2 - 3}; [2; 4]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2}$

Вариант 29

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = 2\cos x + \sqrt{3}x; [0; \pi]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

Вариант 30

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y = \cos x + \frac{\sqrt{3}x}{2}; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Практическое занятие № 8

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Цель: Научиться переводить комплексные числа в тригонометрическую и показательную форму и выполнять действия над ними

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Комплексным числом z называется выражение $z = a + bi,$ где a и b- действительные числа, i - мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1; i = \sqrt{-1}$.

Число a называется действительной частью числа z, а b - мнимой частью.

Числа $z = a + bi$ и $z = a - bi$ называются комплексно $-$ сопряженными.

Два комплексных числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части : $a = c;\ b = d$.

$z = a + bi -$ алгебраическая форма комплексного числа

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $-$тригонометрическая форма

$z = re^{i\varphi}$ $-$ показательная форма

Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

$$z_1 = a + bi \qquad\qquad z_2 = c + di$$

1. Сложение и вычитание комплексных чисел:
$$z_1 + z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$
2. Произведение комплексных чисел:
$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
3. Деление комплексных чисел:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)\cdot(c - di)}{(c + di)\cdot(c - di)} = \frac{(a + bi)\cdot(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Z = r(cos $\boldsymbol{\varphi}$ + isin $\boldsymbol{\varphi}$);

Модуль комплексного числа r можно найти по формуле r = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Величину угла φ можно найти по формуле $\cos\varphi = \frac{a}{r}; \sin\varphi = \frac{b}{r}$

Показательная форма комплексного числа **Z = r$\boldsymbol{e^{i\varphi}}$**

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad\qquad z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

1. Произведение комплексных чисел:
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
2. Деление комплексных чисел:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$
3. Возведение в степень:
$$z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)$$
4. Извлечение корня $n -$ ой степени:
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Задания:

Вариант 1.		Варианты ответов	
1.	Вычислить $\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	1. $2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ 2. $2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$ 3. $2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$	4. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$ 5. $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\frac{\sin 5\pi}{6}\right)$ 6. $2\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$
2.	Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме *-1-i*	1. $2\left(\cos{}^{11\pi}\!/_4+i\sin{}^{11\pi}\!/_4\right)$ 2. $\cos{}^{3\pi}\!/_2+i\sin{}^{3\pi}\!/_2$ 3. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{5\pi}\!/_4+i\sin{}^{5\pi}\!/_4\right)$	4. $\cos{}^{2\pi}\!/_3+i\sin{}^{2\pi}\!/_3$ 5. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{7\pi}\!/_4+i\sin{}^{7\pi}\!/_4\right)$ 6. $3(\cos\pi+i\sin\pi)$
3.	Определите полярные координаты точки $\left(\sqrt{3};1\right)$	1. $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$ 2. $\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ 3. $\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$	4. $\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ 5. $\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ 6. $\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$
4.	Вычислить: $\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	1. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\right)$ 2. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 3. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	4. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$ 5. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\frac{1}{2}(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))$
5.	Вычислить: $\left[3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2$	1. $8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^3$	4. $4(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)$

		2. $9\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2$ 3. $9(cos5\pi+i\sin5\pi)$	5. $9\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 6. $8\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
6.	Вычислить: $\sqrt{z}$, если $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ $z_1=2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	
Вариант 2		Варианты ответов	
1.	Определите полярные координаты точки $(1;-\sqrt{3})$	1. $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$ 2. $\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ 3. $\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$	4. $\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ 5. $\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ 6. $\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$
2.	Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме $\sqrt{3}-i$	1. $2\left(\cos{}^{11\pi}\!/_4+i\sin{}^{11\pi}\!/_4\right)$ 2. $\cos{}^{3\pi}\!/_2+i\sin{}^{3\pi}\!/_2$ 3. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{5\pi}\!/_4+i\sin{}^{5\pi}\!/_4\right)$	4. $\cos{}^{2\pi}\!/_3+i\sin{}^{2\pi}\!/_3$ 5. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{7\pi}\!/_4+i\sin{}^{7\pi}\!/_4\right)$ 6. $3(\cos\pi+i\sin\pi)$
3.	Вычислить: $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	1. $2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ 2. $2(\cos2\pi+i\sin2\pi)$ 3. $2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$	4. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$ 5. $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\frac{\sin5\pi}{6}\right)$ 6. $2\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$
4.	Вычислить: $\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right):2\left(cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$	1. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\right)$	4. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$

		2. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 3. $\frac{1}{2}\left(cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	5. $\frac{1}{8}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\frac{1}{2}(cos(-\pi)+i\sin(-\pi))$
5.	Вычислить: $\left[2\left(cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^3$	1. $8\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 2. $9\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ 3. $9(cos5\pi+i\sin5\pi)$	4. $4(cos3\pi+i\sin3\pi)$ 5. $9\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 6. $8\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
6.	Вычислить: $\sqrt{z}$, если $z=9(\cos\pi+i\sin\pi)$	$z_0=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $z_1=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$	
Вариант 3		Варианты ответов	
1.	Определите полярные координаты точки $(1;-1)$	1. $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$ 2. $\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ 3. $\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$	4. $\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ 5. $\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ 6. $\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$
2.	Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме *1-i*	1. $2(\cos{}^{11\pi}\!/_4+i\sin{}^{11\pi}\!/_4)$ 2. $\cos{}^{3\pi}\!/_2+i\sin{}^{3\pi}\!/_2$ 3. $\sqrt{2}(\cos{}^{5\pi}\!/_4+i\sin{}^{5\pi}\!/_4)$	4. $\cos{}^{2\pi}\!/_3+i\sin{}^{2\pi}\!/_3$ 5. $\sqrt{2}(\cos{}^{7\pi}\!/_4+i\sin{}^{7\pi}\!/_4)$ 6. $3(\cos\pi+i\sin\pi)$
3.	$4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$	1. $2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$	4. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$

		2. $2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$ 3. $2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$	5. $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\frac{\sin 5\pi}{6}\right)$ 6. $2\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$
4.	Вычислите: $\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) : 8(cos\,\pi + i\sin\pi)$	1. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\right)$ 2. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 3. $\frac{1}{2}\left(cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	4. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$ 5. $\frac{1}{8}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\frac{1}{2}(cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$
5.	$\left[2\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\right]^2$	1. $8\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 2. $9\left(cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ 3. $9(cos 5\pi + i\sin 5\pi)$	4. $4(cos 3\pi + i\sin 3\pi)$ 5. $9\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 6. $8\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
6.	Вычислить: $\sqrt[3]{z}$, если $z = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$	$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$ $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$	
Вариант 4		Варианты ответов	
1.	Определите полярные координаты точки $(\sqrt{3}; 1)$	1. $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ 2. $\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ 3. $\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$	4. $\left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ 5. $\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$ 6. $\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$

2.	Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	1. $2\left(\cos{}^{11\pi}/_{4}+i\sin{}^{11\pi}/_{4}\right)$ 2. $\cos{}^{3\pi}/_{2}+i\sin{}^{3\pi}/_{2}$ 3. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{5\pi}/_{4}+i\sin{}^{5\pi}/_{4}\right)$	4. $\cos{}^{2\pi}/_{3}+i\sin{}^{2\pi}/_{3}$ 5. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{7\pi}/_{4}+i\sin{}^{7\pi}/_{4}\right)$ 6. $3(\cos\pi+i\sin\pi)$
3.	$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$	1. $2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ 2. $2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$ 3. $2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$	4. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$ 5. $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\frac{\sin 5\pi}{6}\right)$ 6. $2\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$
4.	Вычислить: $\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right):8(cos\pi+i\sin\pi)$	1. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\right)$ 2. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 3. $\frac{1}{2}\left(cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	4. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$ 5. $\frac{1}{8}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\frac{1}{2}(cos(-\pi)+i\sin(-\pi))$
5.	Вычислить: $\left[3\left(cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)\right]^2$	1. $8\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 2. $9\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ 3. $9(cos 5\pi+i\sin 5\pi)$	4. $4(cos 3\pi+i\sin 3\pi)$ 5. $9\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 6. $8\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
6.	Вычислить: $\sqrt[3]{z}$, если $z=27(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)$	$z_0=2(\cos\pi+i\sin\pi)$ $z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ $z_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)$	
Вариант 5		Варианты ответов	

1.	Определите полярные координаты точки $(1;1)$	1. $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$ 2. $\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ 3. $\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$	4. $\left(\sqrt{2};\frac{2\pi}{3}\right)$ 5. $\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ 6. $\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$
2.	Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме $-3+i$	1. $2\left(\cos{}^{11\pi}\!/_4+i\sin{}^{11\pi}\!/_4\right)$ 2. $\cos{}^{3\pi}\!/_2+i\sin{}^{3\pi}\!/_2$ 3. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{5\pi}\!/_4+i\sin{}^{5\pi}\!/_4\right)$	4. $\cos{}^{2\pi}\!/_3+i\sin{}^{2\pi}\!/_3$ 5. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{7\pi}\!/_4+i\sin{}^{7\pi}\!/_4\right)$ 6. $3(\cos\pi+i\sin\pi)$
3.	$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 4\left(cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$	1. $2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ 2. $2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$ 3. $2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$	4. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$ 5. $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,\frac{\sin 5\pi}{6}\right)$ 6. $2\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$
4.	Вычислить: $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right):\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	1. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\right)$ 2. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 3. $\frac{1}{2}\left(cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	4. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$ 5. $\frac{1}{8}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\frac{1}{2}(cos(-\pi)+i\sin(-\pi))$
5.	Вычислить: $\left[3\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^2$	1. $8\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 2. $9\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	4. $4(cos 3\pi+i\sin 3\pi)$ 5. $9\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

		3. $9(cos 5\pi + i\sin 5\pi)$	6. $8\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
6.	Вычислить: $\sqrt{z}$, если $z = 9\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ $z_1 = 3\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	
Вариант 6		Варианты ответов	
1.	Определите полярные координаты точки $(-1;1)$	1. $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$ 2. $\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ 3. $\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$	4. $\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ 5. $\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ 6. $\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$
2.	Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме $-1+i$	1. $2\left(\cos{}^{11\pi}\!/_4 + i\sin{}^{11\pi}\!/_4\right)$ 2. $\cos{}^{3\pi}\!/_2 + i\sin{}^{3\pi}\!/_2$ 3. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{5\pi}\!/_4 + i\sin{}^{5\pi}\!/_4\right)$	4. $\cos{}^{2\pi}\!/_3 + i\sin{}^{2\pi}\!/_3$ 5. $\sqrt{2}\left(\cos{}^{7\pi}\!/_4 + i\sin{}^{7\pi}\!/_4\right)$ 6. $3(\cos\pi + i\sin\pi)$
3.	$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$	1. $2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ 2. $2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$ 3. $2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$	4. $2(\cos\pi + i\sin\pi)$ 5. $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\frac{\sin 5\pi}{6}\right)$ 6. $2\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$
4.	Вычислить: $(cos\pi + i\sin\pi) : 2(cos 2\pi + i\sin 2\pi)$	1. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\right)$	4. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$

		2. $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 3. $\frac{1}{2}\left(cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$	5. $\frac{1}{8}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\frac{1}{2}\left(cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right)$
5.	Вычислить: $\left[2\left(cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^3$	1. $8\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 2. $9\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ 3. $9(cos5\pi+i\sin5\pi)$	4. $4(cos3\pi+i\sin3\pi)$ 5. $9\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ 6. $8\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
6.	Вычислить: $\sqrt[3]{z}$, если $27\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$	$z_0=3\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$ $z_1=3\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$ $z_2=3\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$	

Практическое занятие № 9

Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной функциям и обратно.

Цель:

- Закрепить умение работы с комплексными числами в различных формах записи.
- Научиться переходить от одной формы записи комплексного числа к другой.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Алгебраическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r – модуль комплексного числа, а φ – один из его аргументов. Представление комплексного числа $z \neq 0$ в указанном виде называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и один из аргументов. Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно находить из системы $\begin{cases} \cos\varphi = a/r; \\ \sin\varphi = b/r. \end{cases}$

Пример. Записать число $z = -\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Решение. Находим модуль

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

Находим угол

$$\alpha = arctg\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Вектор, соответствующий данному комплексному числу, лежит в III координатной четверти (рис. 4), поэтому одним из аргументов является $\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Следовательно,

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Для того чтобы перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ к алгебраической, достаточно найти действительные числа a и b по формулам $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Пример. Записать число $z = 2(\cos 330° + i\sin 330°)$ в алгебраической форме.

Решение. Сначала найдем $\cos 330°$ и $\sin 330°$: $\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

Тогда $a = 2(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$, $b = 2(-1/2) = -1$. Следовательно, $z = 2(\cos 330° + i\sin 330°) = \sqrt{3} - i$.

Показательная форма комплексного числа.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, которая называется *показательной формой* записи.

Пример. Представить число $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ в алгебраической форме.

Решение. По условию, $r = 4,\ \varphi = \frac{5\pi}{6}$, откуда

$$a = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3},$$

$$b = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Значит, $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}} = -2\sqrt{3} + 2i.$

Пример. Выполнить действия и записать ответ в тригонометрической и показательной формах

$$z = 10\left(\frac{1+i}{2-i} + \frac{1-i}{4+2i}\right).$$

Решение. Сначала выполним действия:

$$z = 10\left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{(1-i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}\right) = 10\left(\frac{2+2i+i+i^2}{4-i^2} + \frac{4-4i-2i+2i^2}{16-4i^2}\right) =$$

$$= 10\left(\frac{1+3i}{5} + \frac{2-6i}{20}\right) = 10\frac{4+12i+2-6i}{20} = \frac{6+6i}{2} = 3+3i.$$

Теперь запишем число в тригонометрической и показательной формах, для чего найдем его модуль и аргумент

$$r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2}, \quad \varphi = \alpha = arctg\left|\frac{3}{3}\right| = arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z = 3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Задания:

Вариант 1	**1, 10, 11, 16, 21**
Вариант 2	**2, 9, 12, 17, 22**
Вариант 3	**3, 8, 13, 18, 23**
Вариант 4	**4, 7, 14, 19, 24**
Вариант 5	**5, 6, 15, 20, 25**

Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной формах:

1. $\dfrac{1+i}{1-2i}-(\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i)$.

2. $\dfrac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$.

3. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17}$.

4. $\dfrac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12}$.

5. $\dfrac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3})$

6. $\dfrac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i)$

7. $\dfrac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$

8. $\dfrac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$

9. $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5}$

10. $\dfrac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13})$.

Выполните действия в тригонометрической форме. Результат запишите в показательной и алгебраической формах:

11. $4(\cos 220^\circ+i\sin 220^\circ)\cdot 1{,}5(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)$.

12. $3(\cos 280^\circ+i\sin 280^\circ):\dfrac{3}{4}(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ)$.

13. $(2(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ))^6$.

14. $\sqrt[3]{-8}$.

15. $3(\cos 340^\circ+i\sin 340^\circ):\dfrac{3}{8}(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)$.

16. $\sqrt[4]{16}$.

Запишите комплексное число в тригонометрической и алгебраической формах:

17. $2e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

18. $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

19. $2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

20. $3{,}2e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

21. $1{,}6e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

22. $6e^{\frac{7\pi}{4}i}$

23. $8e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

24. $6e^{2\pi i}$

25. $4e^{\frac{11\pi}{6}i}$

Практическое занятие № 10

Перевод целых, дробных и смешанных чисел из одной системы счисления в другую

Цель: Закрепить умения перевода чисел из одной системы счисления в другую

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

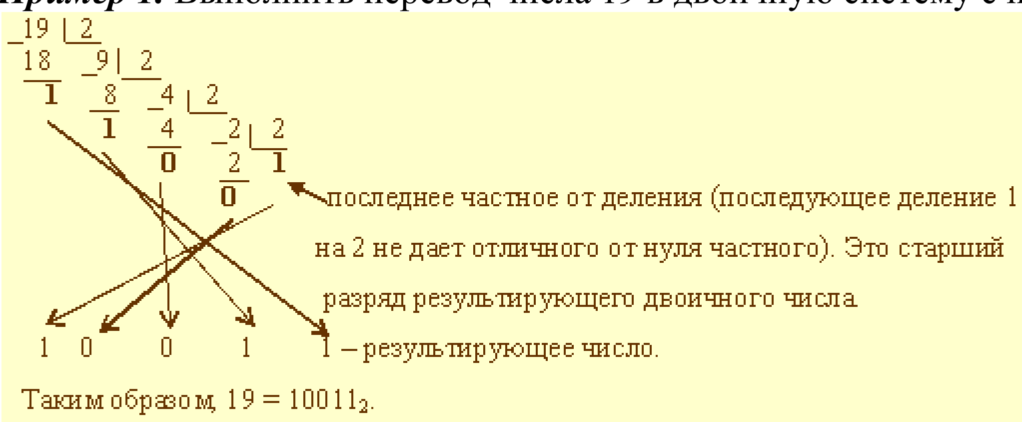
Правила перевода целых чисел

Результатом является целое число.

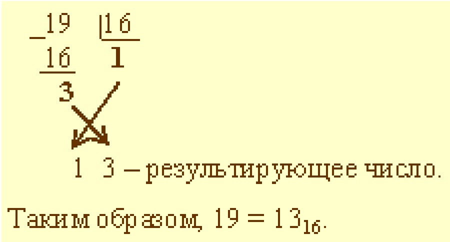
1. Из десятичной системы счисления - в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную:

a. исходное целое число делится на основание системы счисления, в которую переводится (2, 8 или 16); получается частное и остаток;
b. если полученное частное не делится на основание системы счисления так, чтобы образовалась целая часть, отличная от нуля, процесс умножения прекращается, переходят к шагу в). Иначе над частным выполняют действия, описанные в шаге а);
c. все полученные остатки и последнее частное преобразуются в соответствии с таблицей в цифры той системы счисления, в которую выполняется перевод;
d. формируется результирующее число: его старший разряд - полученное последнее частное, каждый последующий младший разряд образуется из полученных остатков от деления, начиная с последнего и кончая первым. Таким образом, младший разряд полученного числа - первый остаток от деления, а старший - последнее частное.

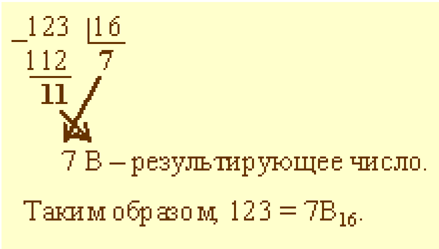
Пример 1. Выполнить перевод числа 19 в двоичную систему счисления:



Пример 2. Выполнить перевод числа 19 в шестнадцатеричную систему счисления:



Пример 3. Выполнить перевод числа 123 в шестнадцатеричную систему счисления:



2. Из двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления - в десятичную. В этом случае рассчитывается полное значение числа по формуле.

Пример 4. Выполнить перевод числа 13_{16} в десятичную систему счисления. Имеем:

$13_{16} = 1*16^1 + 3*16^0 = 16 + 3 = 19.$

Таким образом, $13_{16} = 19$.

Пример 5. Выполнить перевод числа 10011_2 в десятичную систему счисления. Имеем:

$10011_2 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 16+0+0+2+1 = 19.$

Таким образом, $10011_2 = 19$.

Правила перевода правильных дробей

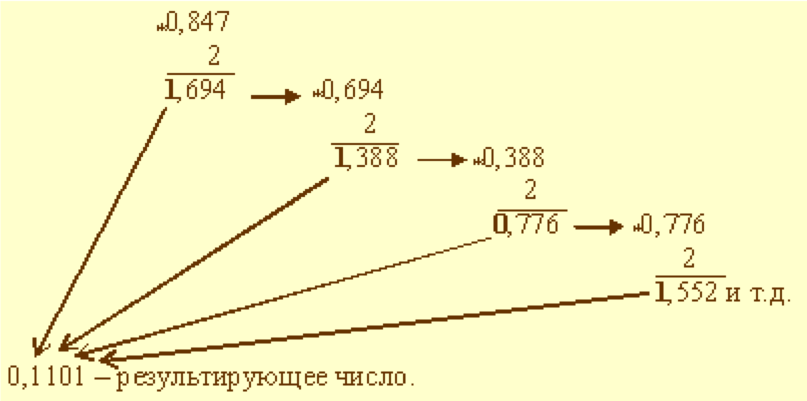
Результатом является всегда правильная дробь.

1. Из десятичной системы счисления - в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную:

a. исходная дробь умножается на основание системы счисления, в которую переводится (2 , 8 или 16);
b. в полученном произведении целая часть преобразуется в соответствии с таблицей в цифру нужной системы счисления и отбрасывается - она является старшей цифрой получаемой дроби;
c. оставшаяся дробная часть вновь умножается на нужное основание системы счисления с последующей обработкой полученного произведения в соответствии с шагами а) и б).
d. процедура умножения продолжается до тех пор, пока ни будет получен нулевой результат в дробной части произведения или ни будет достигнуто требуемое количество цифр в результате;

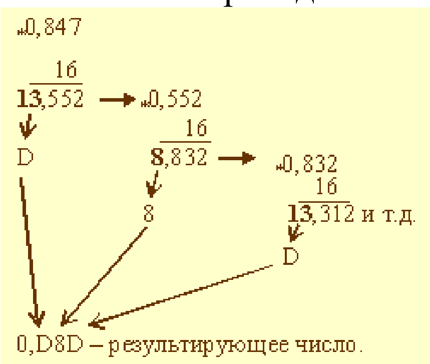
e. формируется результат: последовательно отброшенные в шаге б) цифры составляют дробную часть результата, причем в порядке уменьшения старшинства.

Пример 6. Выполнить перевод числа 0,847 в двоичную систему счисления. Перевод выполнить до четырех значащих цифр после запятой.
Имеем:



В данном примере процедура перевода прервана на четвертом шаге, поскольку получено требуемое число разрядов результата. Очевидно, это привело к потере ряда цифр.
Таким образом, $0{,}847 = 0{,}1101_2$.

Пример 7. Выполнить перевод числа 0,847 в шестнадцатеричную систему счисления. Перевод выполнить до трех значащих цифр.



В данном примере также процедура перевода прервана. Таким образом, 0,847 = $0{,}D8D_2$.

2. Из двоичной и шестнадцатеричной систем счисления - в десятичную. В этом случае рассчитывается полное значение числа по формуле, причем коэффициенты a_i принимают десятичное значение в соответствии с таблицей.

Пример 8. Выполнить перевод из двоичной системы счисления в десятичную числа $0{,}1101_2$. Имеем:
$0{,}1101_2 = 1*2^{-1} + 1*2^{-2} + 0*2^{-3} +1*2^{-4} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0 + 0{,}0625 = 0{,}8125$.
Расхождение полученного результата с исходным для получения двоичной дроби числом вызвано тем, что процедура перевода в двоичную дробь была

прервана.
Таким образом, $0{,}1101_2 = 0{,}8125$.

Пример 9. Выполнить перевод из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную числа $0{,}D8D_{16}$. Имеем:
$0{,}D8D_{16} = 13*16^{-1} + 8*16^{-2} + 13*16^{-3} = 13*0{,}0625 + 8*0{,}003906 + 13*0{,}000244 = 0{,}84692$.
Расхождение полученного результата с исходным для получения двоичной дроби числом вызвано тем, что процедура перевода в шестнадцатеричную дробь была прервана.
Таким образом, $0{,}D8D_{16} = 0{,}84692$.

Правило перевода дробных чисел
Отдельно переводится целая часть числа, отдельно - дробная. Результаты складываются.

Пример 10. Выполнить перевод из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную числа 19,847. Перевод выполнять до трех значащих цифр после запятой.
Представим исходное число как сумму целого числа и правильной дроби:
$19{,}847 = 19 + 0{,}847$.
Как следует из примера 3.2, $19 = 13_{16}$; а в соответствии с примером 3.9 $0{,}847 = 0{,}D8D_{16}$. Тогда имеем:
$19 + 0{,}847 = 13_{16} + 0{,}D8D_{16} = 13{,}D8D_{16}$.
Таким образом, $19{,}847 = 13{,}D8D_{16}$.

Задания:

Вариант 1				
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах счисления.			
1	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
	101010			
		127		
			269	
				9B
2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему $242{,}3_8$			
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $51{,}76_{10}$			
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 4 знака после запятой $82{,}2_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $11001_2 + 1001_2$; $1011_2 * 101_2$.			
6	Выберите число, которое является минимальным среди следующих чисел: 1000000_2, 62_8, 39_{16}, 52_{10}.			
7	Найдите основание системы счисления, если $14_{10} = 16_X$			
Вариант 2				
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах.			
1	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
	110011			
		255		
			341	
				6A
2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему: $A2F{,}C_{16}$			
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $57{,}49_{10}$			
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 4			

	знака после запятой $71{,}6_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $10001_2 + 111_2$; $1010_2 * 11_2$.			
6	Расположите числа в порядке возрастания: 110010_2, 73_8, 40_{16}, 61_{10}.			
7	Найдите основание системы счисления, если $10_{10} = 12_X$			
Вариант 3				
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах счисления			
1	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
	1110111			
		115		
			122	
				АБ
2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему $161{,}2_8$			
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $39{,}54_{10}$			
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 4 знака после запятой $84{,}9_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $110010_2 + 1101_2$; $101_2 * 101_2$.			
6	Выберите число, которое является максимальным среди следующих чисел: 100001_2, 52_8, 42_{16}, 63_{10}.			
7	Найдите основание системы счисления, если $5_{10} = 12_X$			
Вариант 4				
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах счисления			
1	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
	1010101			
		145		
			118	

				Б2
2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему $12В,8_{16}$			
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $64,5_{10}$			
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 4 знака после запятой $52,15_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $10101_2 + 1011_2$; $100_2 * 11_2$.			
6	Расположите числа в порядке убывания: 101001_2, 43_8, 36_{16}, 52_{10}.			
7	Найдите основание системы счисления, если $17_{10} = 11_X$			
Вариант 5				
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах счисления			
1	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
	1110001			
		136		
			99	
				А8
2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему $152,2_8$			
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $39,54_{10}$			
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 4 знака после запятой $84,9_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $110010_2 + 1101_2$; $1001_2 * 1001_2$.			
6	Выберите число, которое является максимальным среди следующих чисел: 100001_2, 52_8, 42_{16}, 63_{10}.			
7	Найдите основание системы счисления, если $155_{10} = 171_X$			
Вариант 6				
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано			

	в различных системах счисления			
1	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
	1000101			
		212		
			144	
				C3
2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему $11C,8_{16}$			
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $64,5_{10}$			
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 4 знака после запятой $52,15_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $10101_2 + 1011_2$; $100_2 * 11_2$.			
6	Выберите число, которое является минимальным среди следующих чисел: 101001_2, 43_8, 36_{16}, 52_{10}.			
7	Найдите основание системы счисления, если $117_{10} = 99_X$			
Вариант 7				
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах счисления			
1	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
	1111101			
		340		
			255	
				D2
2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему $6D,5_{16}$			
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $144,4_{10}$			
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 2 знака после запятой $133,12_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $1010100_2 + 1010_2$; $1001_2 * 111_2$.			

6	Расположите числа в порядке убывания: 101001_2, 114_8, 76_{16}, 121_{10}.
7	Найдите основание системы счисления, если $17_{10} = 11_X$
Вариант 8	
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах счисления

	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
1	11000101			
		400		
			350	
				CE

2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему $25B,4_{16}$
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $164,42_{10}$
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 2 знака после запятой $252,15_{10}$
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $1010001_2 + 1010001_2$; $10111_2 * 111_2$.
6	Выберите число, которое является максимальным среди следующих чисел: 10111001_2, 443_8, 236_{16}, 352_{10}.
7	Найдите основание системы счисления, если $17_{10} = 21_X$
Вариант 9	
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах счисления

	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
1	10101101			
		444		
			105	
				D3

2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему 1111001_2
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $164,4_{10}$

4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 3 знака после запятой $252{,}05_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $1010100_2 + 101001_2$; $1001_2 * 101_2$.			
6	Расположите числа в порядке убывания: 10111001_2, 443_8,236_{16}, 352_{10}.			
7	Найдите основание системы счисления, если $45_{10} = 1200_X$			
Вариант 10				
	Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и тоже целое число должно быть записано в различных системах счисления			
1	Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная
	100110101			
		412		
			340	
				1C3
2	Переведите число из указанной системы счисления в десятичную систему $2AB{,}8_{16}$			
3	Переведите число из десятичной системы счисления в двоичную систему с точностью 3 знака после запятой $164{,}5_{10}$			
4	Переведите число из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему с точностью 2 знака после запятой $252{,}1_{10}$			
5	Выполните указанные действия над двоичными числами: $1000101_2 + 111011_2$; $10011_2 * 110_2$.			
6	Выберите число, которое является минимальным среди следующих чисел: 10111001_2,543_8, 336_{16}, 252_{10}.			
7	Найдите основание системы счисления, если $17_{10} = 101_X$			

Практическое занятие № 11

Представление положительных и отрицательных двоичных чисел в прямом, обратном, дополнительном и модифицированном кодах.

Цель: Научиться представлять двоичные числа в прямом, обратном и модифицированном (дополнительном) кодах

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Код числа - это модель представления числа в цифровом устройстве.

Прямой код – это способ представления двоичных чисел с фиксированной запятой. Прямой код главным образом используется для записи неотрицательных чисел,но возможно использование прямого кода для записи как отрицательных, так и положительных чисел, при этом числа дополняются знаковым разрядом.

Изобретение обратного и дополнительного кода возникло из-за экономиисредств при построении арифметико-логических устройств (АЛУ) вычислительных машин.Для того чтобы выполнить арифметическую операцию сложения, в АЛУ компьютера имеется специальный узел - **сумматор**, а для того чтобы выполнить вычитание, казалось бы, требуется "вычитатор", что влечет за собой дополнительные расходы. Поэтому разработчики первых компьютеров нашли способ производить операцию вычитания с помощью сумматора, используя дополнительный код, т.е. операция вычитания была заменена операцией сложения.

Для получения дополнительного кода для двоичной системы счисления необходимо определить разрядность используемого регистра (устройство для хранения *n*-разрядных двоичных чисел), затем определяется максимальное положительное и отрицательное числа, которые могут быть записаны в регистр. Например, рассмотрим 8-ми разрядный регистр, старший разряд отдается под знак числа: 0 – плюс и 1 – минус, т.е. остается 7 значащих разрядов, откуда получаем количество чисел – 128. При этом диапазон положительных чисел от 0 до 127, а отрицательных чисел от -127 до 0.

Перед тем как перевести числа в дополнительный код, необходимо получить обратный код. Для этого проинвертируем все разряды регистра, т.е. заменим 0 на 1, а 1 на 0 и получим обратный код. Прибавив к числу в обратной коде единицу, получим дополнительный код.

Пример:

Имеется 8-ми разрядный регистр с записанным числом 12.

00001100_2 - 12_{10}

Инвертируем разряды и получим:

11110011_2 – обратный код.

Прибавляем единицу:

11110011_2

$\underline{00000001_2}$

11110100_2 – дополнительный код.

В итоге дополнительный код представляет собой число 12 со знаком минус.

Формируя дополнительный код от некоторого числа, получается число противоположное по знаку исходному.

Идея вычитания состоит в том, чтобы хранить и обрабатывать положительные числа в прямом коде, а отрицательные в дополнительном. Таким образом, операция вычитания заменяется операцией сложения.

Пример:

Необходимо выполнить операция вычитание в 8-ми разрядном регистре: 27-13=x.

$27_{10} – 11011_2$

$13_{10} – 1101_2$

Так как вычесть нужно число 13, то его необходимо представить в дополнительном коде.

$13_{10} – 00001101_2$ – прямой код

$13_{10} – 11110010_2$ – обратный

$13_{10} – 11110011_2$ – дополнительный код

Выполняем сложение 27 в прямом коде и 13 в дополнительном:

00011011_2

$\underline{11110011_2}$

100001110_2

Старшая единица вышла за разрядную сетку, ее можно игнорировать. В итоге получилось число $\underline{\mathbf{0}}0001110_2$, анализируя старший разряд определяем в каком коде находится число, если 0 – прямой, 1 – дополнительный. Число находится в прямом коде, а значит число положительной, переведем его в десятичную систему счисления и получим 14_{10}, что соответствует правильному решению уравнения 27-13=x. Если получаемое число представлено в дополнительном коде, то его следует перевести в прямой код и представить ответ со знаком минус.

Нужно учитывать, что при сложении чисел в прямом и дополнительном коде, если получаемый результат больше чем максимально возможно хранимое число в регистре, то возникает переполнение разрядной сетки и ответ будет неверным.

Задания:

1) Заполнить таблицу. Решение указать после таблицы.

	10	**2**	**8**	**16**
A				
B				
A+B				
A-B				

2) Произвести арифметические действия в *n* разрядном регистре, используя прямой и дополнительный код: а) $A-B=X_1$ б) $A+B=X_2$ в) $B-A=X_3$

Варианты заданий

1) $A=204_{10}$, $B=175_{10}$.Регистр: 10-ти разрядный
2) $A=221_{10}$, $B=154_{10}$.Регистр: 10-ти разрядный
3) $A=604_{10}$, $B=1105_{10}$. Регистр: 12-ти разрядный
4) $A=144_{10}$, $B=1005_{10}$. Регистр: 12-ти разрядный
5) $A=51_{10}$, $B=305_{10}$. Регистр: 10-ти разрядный
6) $A=114_{10}$, $B=25_{10}$. Регистр: 10-ти разрядный
7) $A=754_{10}$, $B=105_{10}$.Регистр: 12-ти разрядный
8) $A=654_{10}$, $B=165_{10}$. Регистр: 12-ти разрядный
9) $A=214_{10}$, $B=177_{10}$. Регистр: 10-ти разрядный
10) $A=121_{10}$, $B=155_{10}$. Регистр: 10-ти разрядный
11) $A=564_{10}$, $B=115_{10}$. Регистр: 12-ти разрядный
12) $A=134_{10}$, $B=1025_{10}$. Регистр: 12-ти разрядный
13) $A=141_{10}$, $B=95_{10}$. Регистр: 10-ти разрядный
14) $A=119_{10}$, $B=55_{10}$. Регистр: 10-ти разрядный
15) $A=454_{10}$, $B=105_{10}$. Регистр: 12-ти разрядный

Практическое занятие № 12

Выполнение арифметических операций с многоразрядными двоичными числами, представленными в различных кодах.

Цель: Закрепить умения выполнять действия с многоразрядными двоичными числами в различных кодах

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Целые числа могут представляться в компьютере со знаком или без знака.

Целые числа без знака

Обычно занимают в памяти компьютера один или два байта. В однобайтовом формате принимают значения от 00000000_2 до 11111111_2. В двубайтовом формате - от $00000000\ 00000000_2$ до $11111111\ 11111111_2$.

Примеры:

а) число $72_{10} = 1001000_2$ в **однобайтовом** формате:

Номера разрядов	7	6	5	4	3	2	1	0
Биты числа	0	1	0	0	1	0	0	0

б) это же число в **двубайтовом** формате:

Номера разрядов	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Биты числа	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

в) число 65535 в **двубайтовом** формате:

Номера разрядов	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Биты числа	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Целые числа со знаком

Обычно занимают в памяти компьютера один, два или четыре байта, при этом самый левый (старший) разряд содержит информацию о знаке числа. Рассмотрим особенности записи целых чисел со знаком на примере **однобайтового формата**, при котором для знака отводится один разряд, а для цифр абсолютной величины - семь разрядов.

Положительные числа в прямом, обратном и дополнительном кодах изображаются одинаково - двоичными кодами с цифрой 0 в знаковом разряде. Например:

Число $1_{10}=1_2$

0	0	0	0	0	0	0	1

Знак числа "+"

Число $127_{10}=1111111_2$

0	1	1	1	1	1	1	1

Знак числа "+"

Отрицательные числа в прямом, обратном и дополнительном кодах имеют разное изображение.

1. **Прямой код**. В знаковый разряд помещается цифра 1, а в разряды цифровой части числа — двоичный код его абсолютной величины. Например:

Прямой код числа - 1

1	0	0	0	0	0	0	1

Знак числа "-"

Прямой код числа - 127

1	1	1	1	1	1	1	1

Знак числа "-"

2. **Обратный код**. Получается инвертированием всех цифр двоичного кода абсолютной величины числа, включая разряд знака: нули заменяются единицами, а единицы — нулями.

Например:

```
Число: -1                               Число: -127
Код модуля числа:    0 0000001          Код модуля числа:    0 1111111
Обратный код числа: 1 1111110           Обратный код числа: 1 0000000

|1|1|1|1|1|1|1|0|                       |1|0|0|0|0|0|0|0|
```

3. **Дополнительный код**. Получается образованием обратного кода с последующим прибавлением единицы к его младшему разряду. Например:

```
Дополнительный код числа - 1            Дополнительный код числа - 127

|1|1|1|1|1|1|1|1|                       |1|0|0|0|0|0|0|1|
```

Обычно **отрицательные десятичные числа при вводе в машину автоматически преобразуются в обратный или дополнительный двоичный код** и в таком виде хранятся, перемещаются и участвуют в операциях. При выводе таких чисел из машины происходит **обратное преобразование в отрицательные десятичные числа.**

Сложение и вычитание

В большинстве компьютеров операция вычитания не используется. Вместо нее производится сложение обратных или дополнительных кодов уменьшаемого и вычитаемого. Это позволяет существенно упростить конструкцию АЛУ.

<u>Сложение обратных кодов.</u>

1. А и В положительные. При суммировании складываются все разряды, включая разряд знака. Так как знаковые разряды положительных слагаемых равны нулю, разряд знака суммы тоже равен нулю. Например:

```
Десятичная запись          Двоичные коды

   3                          0 0000011
+  7                       +  0 0000111
  ---                         ---------
  10                          0 0001010
```

Получен правильный результат.

2. А положительное, В отрицательное и по абсолютной величине больше, чем А. Например:

```
Десятичная запись          Двоичные коды

    3                         0 0000011
+ -10                      +  1 1110101   Обратный код числа -10
  ---                         ---------
   -7                         1 1111000   Обратный код числа -7
```

Получен правильный результат в обратном коде. При переводе в прямой код биты цифровой части результата инвертируются: 1 0000111 = -7_{10}.

3. А положительное, В отрицательное и по абсолютной величине меньше, чем А. Например:

```
Десятичная запись          Двоичные коды

   10                         0 0001010
+  -3                      +  1 1111100   Обратный код числа -3
  ---                         ---------
    7                         0 0000110
                                     +1
                              ---------
                              0 0000111
```

Компьютер исправляет полученный первоначально неправильный результат (6 вместо 7) **переносом единицы** из знакового разряда в младший разряд суммы.

4. А и В отрицательные.

Например:

Десятичная запись	**Двоичные коды**	
+ -3	+ 1 1111100	Обратный код числа -3
-7	1 1111000	Обратный код числа -7
-10	1 1110100	
	+1	
	1 1110101	Обратный код числа -10

Полученный первоначально неправильный результат (обратный код числа -11_{10} вместо обратного кода числа -10_{10}) компьютер исправляет переносом единицы из знакового разряда в младший разряд суммы. При переводе результата в прямой код биты цифровой части числа инвертируются: 1 0001010 = -10_{10}.

При сложении может возникнуть ситуация, когда старшие разряды результата операции не помещаются в отведенной для него области памяти. Такая ситуация называется **переполнением разрядной сетки формата числа.** Для обнаружения переполнения и оповещения о возникшей ошибке в компьютере используются специальные средства. Ниже приведены два возможных случая переполнения.

5. А и В положительные, сумма А+В больше, либо равна 2^{n-1}, где n — количество разрядов формата чисел (для однобайтового формата n=8, 2^{n-1} = 27 = 128).

Например:

Десятичная запись	**Двоичные коды**	
+ 65	+ 0 1000001	
97	0 1100001	
162	1 0100010	Переполнение

Семи разрядов цифровой части числового формата **недостаточно** для размещения восьмиразрядной суммы (162_{10} = 10100010_2), поэтому **старший разряд суммы оказывается в знаковом разряде.** Это вызывает **несовпадение знака суммы и знаков слагаемых**, что **является свидетельством переполнения разрядной сетки**.

6. А и В отрицательные, сумма абсолютных величин А и В больше, либо равна 2^{n-1}. Например:

Десятичная запись	**Двоичные коды**	
+ - 63	+ 1 1000000	Обратный код числа -63
-95	1 0100000	Обратный код числа -95
158	0 1100000	Переполнение
	+1	

Здесь **знак суммы** тоже **не совпадает со знаками слагаемых**, что свидетельствует о **переполнении разрядной сетки**.

<u>Сложение дополнительных кодов</u>. Здесь также имеют место рассмотренные выше шесть случаев:

1. А и В положительные. Здесь нет отличий от случая 1, рассмотренного для обратного кода.

2. А положительное, В отрицательное и по абсолютной величине больше, чем А.

Например:

Десятичная запись	Двоичные коды	
+ 3	+ 0 0000011	
-10	1 1110110	Дополнительный код числа -10
-7	1 1111001	Дополнительный код числа -7

Получен правильный результат в дополнительном коде. При переводе в прямой код биты цифровой части результата инвертируются и к младшему разряду прибавляется единица: 1 0000110 + 1 = 1 0000111 = -7_{10}.

3. А положительное, В отрицательное и по абсолютной величине меньше, чем А.

Например:

Десятичная запись	Двоичные коды	
+ 10	+ 0 0001010	
-3	1 1111101	Дополнительный код числа -3
7	0 0000111	
	перенос отбрасывется	

Получен правильный результат. Единицу переноса из знакового разряда компьютер отбрасывает.

4. А и В отрицательные.

Например:

Десятичная запись	Двоичные коды	
+ -3	+ 1 1111101	Дополнительный код числа -3
-7	1 1111001	Дополнительный код числа -7
-10	1 1110110	Дополнительный код числа -10
	перенос отбрасывется	

Получен правильный результат в дополнительном коде. **Единицу переноса** из знакового разряда компьютер **отбрасывает**.

Случаи переполнения для дополнительных кодов рассматриваются по аналогии со случаями 5 и 6 для обратных кодов.

Умножение и деление

Во многих компьютерах **умножение** производится как последовательность сложений и сдвигов. Для этого в АЛУ имеется **регистр**, называемый **накапливающим сумматором**, который до начала выполнения операции **содержит число ноль**. В процессе выполнения операции в нем поочередно размещаются **множимое** и **результаты промежуточных сложений**, а по завершении операции — **окончательный результат**.

Другой регистр АЛУ, участвующий в выполнении этой операции, **вначале содержит множитель**. Затем по мере выполнения сложений содержащееся в нем **число уменьшается**, **пока не достигнет нулевого значения.**

Для иллюстрации умножим 110011_2 на 101101_2.

Накапливающий сумматор	Множитель	
+ 000000000000	101101	
110011		
+ 110011	101100	
110011		Сдвиг на две позиции влево
+ 11111111	101000	
110011		Сдвиг на одну позицию влево
+ 1010010111	100000	
110011		Сдвиг на две позиции влево
100011110111	000000	

Деление для компьютера является трудной операцией. Обычно оно реализуется путем многократного прибавления к делимому дополнительного кода делителя.

Задания:

1. Выполнить сложение в прямом и обратном коде:

а) 0,101001 +0,011011
г) 0,100001 +0,011111,
б) 0,101011 +0,010011
д) 0,101010+0,000111,
в) 0,110011 +0,001111
е) 0,101110+0,010111,
ж) 0,100100+0,111011.

2. Выполнить сложение, используя в каждом случае дополнительный и обратный коды:

а) 0,110001+(-0,001011);
г) (-0,100111)+0,001001;
б) (-0,010111)+(-0,000001);
д) (-0,101010)+(-0,011011);
в) (-0,001010)+(-0,011011);
е) (-0,011101)+(0,001010);
ж) (-0,100101)+ (0,010111).

3. Выполнить вычитание, используя в каждом случае дополнительный и обратный коды:

а) 0,101011-0,001111,
г) (-0,101111) -0,101011,
б) 0,111011-0,101110,
д) 0,100110-0,011000.
в) 0,111011-0,110101,
е) 0,101110-0,010111,
ж) 0,100001-0,001110.

4. Выполнить умножение двух чисел х и у в прямом коде:

а) x=0,10011;
y=0,11001;
б) x=0,001011;
y=0,111011;
в) x=0,100011;
y=0,101001;
г) x=0,011111
y=0,101111;
д) x=0,010000;
y=0,101100;
е) x=0,001011
y=.0,111111;
ж) x=0,011001;
y=0,111111.

Практическое занятие № 13

Законы алгебры логики и базовые логические элементы

Цель: Научиться использовать законы алгебры логики для упрощения логических формул.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Закон	Для ИЛИ	Для И
Переместительный	$x \vee y = y \vee x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Сочетательный	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Распределительный	$x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$	$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$
Правила де Моргана	$\overline{x \vee y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$	$\overline{x \cdot y} = \overline{y} \vee \overline{x}$
Равносильности	$x \vee x = x$	$x \cdot x = x$
Поглощения	$x \vee (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x \vee y) = x$
Склеивания	$(x \cdot y) \vee (\overline{x} \cdot y) = y$	$(x \vee y) \cdot (\overline{x} \vee y) = y$
Операция переменной с ее инверсией	$x \vee \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Операция с константами	$x \vee 0 = x; x \vee 1 = 1$	$x \cdot 1 = x; x \cdot 0 = 0$
Двойного отрицания	$\overline{\overline{x}} = x$	

Задания:

1. Проверить равносильности двумя способами: построив таблицу истинности и упростив левую и правую части.
2. Упростить логические формулы.

Вариант 1

1. $\overline{\overline{b\vee c}\vee\overline{a\vee c}\vee a\cdot b}=c\cdot\overline{a}\vee c\cdot\overline{b}$;
2. $(\overline{X\cdot Y}\vee\overline{X}\cdot Y\cdot Z)\cdot(\overline{X}\vee\overline{X\cdot Y\vee\overline{Y}})$;

Вариант 2

1. $\overline{\overline{a}\vee\overline{b}\cdot(a\vee c)\vee b\cdot(\overline{a\vee c})}=a\cdot b$;
2. $(A\vee\overline{B})\cdot(\overline{A}\vee B)\vee\overline{A\cdot B}$.

Вариант 3

1. $(a\cdot b\vee a\cdot b\cdot\overline{c}\vee b\cdot\overline{c}\vee c)\cdot(c\vee a\cdot c\vee\overline{a}\cdot b\cdot c)=c$
2. $(\overline{A}\cdot B)\cdot(B\vee C)\cdot(A\vee B\cdot C)$.

Вариант 4

1. $(b\cdot c\vee a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\vee\overline{a}\cdot c)\cdot(a\cdot b\vee\overline{c}\vee a\cdot c)=a\cdot((b\cdot c)\vee(\overline{b}\cdot\overline{c}))$.
2. $(\overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}}\vee\overline{X})\cdot\overline{X\vee\overline{\overline{X}\cdot Y}}$

Вариант 5

1. $(a\vee b)\cdot(a\vee c)=a\vee b\cdot c$;
2. $A\cdot((\overline{B}\vee\overline{C})\vee\overline{B}\cdot C)\vee\overline{A}$.

Вариант 6

1. $(a\cdot b\vee a\cdot\overline{b}\cdot c\vee\overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c})\cdot(\overline{a}\cdot b\cdot c\vee\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\vee a\cdot b\cdot c)=a\cdot b\cdot c$;
2. $a\cdot d\cdot(\overline{a}\vee\overline{c}\cdot b\vee d)\vee a\cdot\overline{c}\vee\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}$.

Вариант 7

1. $a\cdot b\cdot c\vee\overline{a}\cdot b\cdot c\vee a\cdot\overline{b}\cdot c\vee\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c=c$;
2. $a\cdot b\cdot c\vee a\cdot b\cdot\overline{c}\vee a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d\vee a\cdot b\cdot c\cdot\overline{d}\vee a\cdot b\cdot c\cdot d$.

Вариант 8

1. $a\cdot b\vee a\cdot\bar{b}\cdot c\vee\bar{b}\cdot a\cdot\bar{c}\vee a\cdot\bar{c}=a;$
2. $\overline{a \vee b \vee c} \vee \bar{b} \vee (\overline{a \vee \bar{b} \vee c} \bullet \overline{\bar{a} \vee b \vee c}) \vee \bar{a}\bullet\bar{b}.$

Вариант 9

1. $(\overline{(a\vee b)\cdot(\bar{a}\vee\bar{b})})\vee\bar{a}\vee b=\bar{a}\vee b;$
2. $a \vee d \vee \bar{a}\bullet b\bullet c \vee \bar{a}\bullet\bar{b}\bullet c \vee \bar{a}\bullet\bar{b}\bullet\bar{c}.$

Вариант 10

1. $(a\cdot\bar{b}\vee\bar{b}\cdot\bar{c})\cdot(a\cdot b\vee a\cdot c\vee b\cdot c)\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\vee\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}\vee a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c};$
2. $a \vee b \vee \bar{b}\bullet c\bullet d \vee \bar{b}\bullet\bar{c}\bullet\bar{d} \vee \bar{b}\bullet\bar{c}\bullet d.$

Вариант 11

1. $(b\cdot c\vee a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\vee\bar{a}\cdot c)\cdot(a\cdot b\vee\bar{c}\vee a\cdot c)=a\cdot((b\cdot c)\vee(\bar{b}\cdot\bar{c}));$
2. $a\bullet b\bullet c \vee a\bullet\bar{b}\bullet c \vee a\bullet b\bullet\bar{c}\bullet d.$

Вариант 12

1. $\overline{\overline{b\vee c}\vee\overline{a\vee c}\vee a\cdot b}=c\cdot\bar{a}\vee c\cdot\bar{b};$
2. $a\bullet\bar{c} \vee c\bullet(a \vee \bar{b}) \vee c\bullet(b \vee \bar{c}).$

Вариант 13

1. $(a\cdot b\vee a\cdot\bar{b}\cdot c\vee\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c})\cdot(\bar{a}\cdot b\cdot c\vee\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}\vee a\cdot b\cdot c)=a\cdot b\cdot c;$
2. $(\bar{a} \vee c)\bullet\overline{a\bullet c}\bullet(b \vee \bar{c})\bullet\overline{b\bullet c}.$

Вариант 14

1. $(a\cdot\bar{b}\vee\bar{b}\cdot\bar{c})\cdot(a\cdot b\vee a\cdot c\vee b\cdot c)\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\vee\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}\vee a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c};$
2. $\overline{a\bullet(b \vee \bar{c}) \vee \bar{a}\bullet b}.$

Вариант 15

1. $(b\cdot c\vee a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\vee\bar{a}\cdot c)\cdot(a\cdot b\vee\bar{c}\vee a\cdot c)=a\cdot((b\cdot c)\vee(\bar{b}\cdot\bar{c}));$

$a\bullet\bar{c} \vee c\bullet(b \vee \bar{c}) \vee (a \vee \bar{b})\bullet c.$

Практическое занятие № 14

Построение СДНФ и СКНФ по таблице истинности

Цель: Изучить СДНФ и СКНФ. Научиться создавать СДНФ и СКНФ по таблице истинности

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Формула $F(x_1,x_2, x_3,\ldots x_n)$ называется СДНФ, если

1) она является ДНФ;
2) каждая элементарная конъюнкция ДНФ содержит все наименования переменных, от которых зависит формула, и каждое наименование входит в него один раз;
3) среди элементарных конъюнкций ДНФ нет одинаковых.

Примеры:

1) $(\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$ - СДНФ
2) $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$ - не является СДНФ, т.к в первой скобке нет переменной z.

Формула $F(x_1,x_2, x_3,\ldots x_n)$ называется СКНФ, если

1) она является КНФ;
2) каждая элементарная дизъюнкция содержит все наименования переменных, от которых зависит формула и это наименование входит только один раз;
3) среди элементарных дизъюнкций КНФ нет одинаковых.

Пример:

$(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$- СКНФ

Теорема 1: Если формула не тождественно истинная, то для нее существует и при том единственная СКНФ.

Теорема 2: Если формула не тождественно ложная, то для нее существует и при том единственная СДНФ.

Совершенные формы можно строить с помощью:

1) равносильных преобразований;
2) таблиц истинности.

Алгоритмы построения СДНФ и СКНФ по таблице истинности

Алгоритм построения СДНФ с помощью таблице истинности

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере, используя таблицу

– Таблица истинности

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1) выбираем те строки таблицы 8, на которых формула принимает значение истина: 2, 4, 7,8;

2) для каждой выбранной строки строим элементарную конъюнкцию из переменных, от которых зависит формула следующим образом: если переменная в строке принимает значение истина, то она непосредственно входит в элементарную конъюнкцию, если ложь, то она входит с отрицанием

1: $\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z$; 2: $\bar{x}\wedge y\wedge z$; 5: $x\wedge y\wedge\bar{Z}$; 7: $x\wedge y\wedge z$;

3) из элементарных конъюнкций составляем ДНФ

$\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z \vee \bar{x}\wedge y\wedge z \vee x\wedge y\wedge\bar{Z} \vee x\wedge y\wedge z$ –СДНФ

Замечание: Если все строки формулы в таблице истинности принимают значение ложь, то СДНФ построить нельзя.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности.

Данный алгоритм аналогичен алгоритму построения СДНФ.

1) выбираем строки таблицы, на которых формула принимает значение ложь;

2) для каждой выбранной строки строим элементарную дизъюнкцию из переменных, от которых зависит формула, следующим образом: если переменная в строке принимает значение ложь, то она сама входит в элементарную дизъюнкцию, если истина, то она входит с отрицанием;

3) из элементарных дизъюнкции составляем КНФ.

Замечание: Если все строки формулы в таблице принимают значение истина, то СКНФ построить нельзя.

В алгебре высказываний существуют алгоритмы для формул, с помощью которых можно сказать, является ли формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой. Рассмотрим следующие алгоритмы:

1) Для определения типа формулы надо построить ДНФ (КНФ) и проверить критерий ложности (критерий истинности)

Если критерий выполнен, то формула тождественно ложна (тождественно истинна), если нет, то строим КНФ (ДНФ) и проверяем критерий истинности (критерий ложности), если критерий выполнен, то формула тождественно истинна (тождественно ложна) в противном случае, формула только выполнима.

2) Для определения типа формулы надо построить СДНФ или СКНФ. Если СДНФ построена, то формула не является тождественно ложной. Далее считаем число слагаемых в СДНФ: если их 2^n ,где n - число переменных, от которых зависит формула, то формула тождественно истинна, в противном случае выполнима.

Если СКНФ построена, то формула не тождественно истинна. Если число слагаемых в СКНФ равно 2^n, где n - число переменных, то формула тождественно ложна, в противном случае формула выполнима.

Задания:

Задание № 1

По таблице истинности своего варианта построить СДНФ и СКНФ:

Вариант 1

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 2

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 3

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 4

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 5

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Вариант 6

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 7

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Вариант 8

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 9

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 10

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 11

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 12

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 13

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Вариант 14

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 15

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Задание № 2

Для каждой из следующих формул алгебры высказываний найдите СДНФ и СКНФ с помощью таблицы истинности.

№ варианта	Формулы	№ варианта	Формулы
1	$(x \vee y) \to (\bar{x} \to z)$	9	$\big((x \to (y \wedge z)\big) \to (\bar{y} \to \bar{x})) \to \bar{y}$
2	$(\bar{x} \to y) \vee (\overline{x \to y})$	10	$\big((x \to y) \wedge (y \to z)\big) \to (x \to z)$
3	$((x \vee y \vee z) \to x) \vee z$	11	$(\bar{x} \leftrightarrow y) \to z$
4	$((x \to y) \to z) \to \bar{x}$	12	$(y \vee (x \to z)) \to y$
5	$(x \vee (y \to z)) \to x$	13	$(y \vee x) \to (\bar{y} \to z)$
6	$(x \to y) \to (y \wedge z)$	14	$((\bar{y} \wedge \bar{x}) \vee z) \to (z \wedge \bar{x})$
7	$(\bar{x} \wedge \bar{y}) \to (x \wedge y)$	15	$(\bar{y} \leftrightarrow x) \to z \to \bar{x}$
8	$((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z) \to (z \wedge \bar{y})$		

Задание № 3

Установить является ли формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой.

№ варианта	Формулы
1	а) $F(x,y,z)= (x \wedge y \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{y}) \vee (\bar{Z} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge y)$
	б) $F(a,b)=(a \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$
2	а) $F(x,y,z)= (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{y} \vee x \vee z) \wedge (\bar{Z} \vee y \vee x)$
	б) $F(a,b,c)=(a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c)$
3	а) $F(a,b,c)=(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c)$
	б) $F(x,y,z)= (x \vee y \vee \bar{y}) \wedge (x \vee z \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee x)$
4	а) $F(a,b)=(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$
	б) $F(x,y,z)= (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{x}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{y}) \vee (\bar{Z} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge y)$
5	а) $F(x,y,z)= (x \vee y \vee \bar{y}) \wedge (x \vee z \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee x)$
	б) $F(a,b,c)=(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c)$
6	а) $F(c,b)=(c \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge b) \vee (\bar{c} \wedge b) \vee (\bar{c} \wedge \bar{b})$
	б) $F(x,y,z)= (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{x}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{y}) \vee (\bar{Z} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge y)$

7 а) $F(x,y,z)=(x\wedge y\wedge \bar{y}) \vee (x\wedge z\wedge \bar{Z}) \vee (\bar{x}\wedge y\wedge x)$

б)$F(a,b,c)=(\bar{a}\vee b\vee \bar{c}) \wedge (\bar{a}\vee b\vee c) \wedge (\bar{a}\vee \bar{b}\vee c)$

8 а) $F(a,b,c)=(a\wedge b\wedge \bar{b}) \vee (a\wedge c\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge a)$

б)$F(a,b,c)=(\bar{a}\vee b\vee \bar{c}) \wedge (\bar{a}\vee b\vee c)$

9 а) $F(x,y,z)=(x\vee y\vee z) \wedge (\bar{y}\vee x\vee z) \wedge(\bar{Z}\vee y\vee x)$

б) $F(a,b,c)=(a\wedge c\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge a)$

10 а) $F(x,y,z)=(x\vee y\vee z) \wedge (\bar{y}\vee x\vee z) \wedge (\bar{Z}\vee y\vee x) \wedge (\bar{x}\vee y\vee \bar{z})$

б) $F(a,b,c)=(a\wedge c\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge a) \vee (a\wedge b\wedge \bar{c})$

11 а) $F(x,y,z)=(x\vee y\vee z) \wedge (\bar{y}\vee x\vee z) \wedge(\bar{Z}\vee y\vee x) \wedge (\bar{x}\vee y\vee \bar{z}) \wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee \bar{z})$

б) $F(a,b,c)=(a\wedge c\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge a) \vee (a\wedge b\wedge \bar{b})$

12 а) $F(a,b,c)=(a\vee b\vee \bar{b}) \wedge (a\vee c\vee \bar{c}) \wedge (\bar{a}\vee b\vee a)$

б)$F(a,b,c)=(\bar{a}\wedge b\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge c)$

13 а) $F(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z) \vee (\bar{y}\wedge x\wedge z) \vee (\bar{Z}\wedge y\wedge x) \vee (\bar{x}\wedge y\wedge \bar{z}) \vee (\bar{x}\wedge \bar{y}\wedge \bar{z})$

б) $F(a,b,c)=(a\vee c\vee \bar{c}) \wedge (\bar{a}\vee b\vee a) \wedge (a\vee b\vee \bar{b})$

14 а) $F(x,y,z)=(\bar{y}\wedge x\wedge z) \vee (\bar{Z}\wedge y\wedge x) \vee (\bar{x}\wedge y\wedge \bar{z}) \vee (\bar{x}\wedge \bar{y}\wedge \bar{z})$

б) $F(a,b,c)=(\bar{a}\vee b\vee a) \wedge (a\vee c\vee \bar{c})\wedge (a\vee b\vee \bar{b})$

15 а) $F(x,y,z)=(\bar{x}\wedge \bar{y}\wedge y) \vee (x\wedge y\wedge \bar{y}) \vee (\bar{Z}\wedge y\wedge z) \vee (x\wedge y\wedge \bar{x})$

б) $F(a,b)=(\bar{a}\vee \bar{b})\wedge (a\vee \bar{b})\wedge(a\vee b)\wedge(\bar{a}\vee b)$

Практическое занятие № 15

Составление закона распределения дискретной случайной величины. Вычисление математического ожидания и среднего квадратичного отклонения.

Цель:
Научиться составлять закон распределения, функцию распределения и числовые характеристики дискретной случайной величины.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

1 Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

2 Дискретной случайной величиной (ДСВ) называют такую величину, множество значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.

3 Заданное соответствие между возможными значениями СВ и их вероятностями называется законом распределения случайной величины ; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

4 При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности. Эта таблица называется рядом распределения.

5 Ряд распределения можно представить графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения ДСВ, а по оси ординат - соответствующие вероятности. Соединив полученные точки отрезками, получим ломаную, называемую много- угольником распределения вероятностей

6 Функцией распределения случайной величины X (обозначается F(x)) назы- вается функция, определяемая соотношением F(x) = P(X < x).

7 Математическое ожидание ДСВ X равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е. $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$

8 Дисперсией ДСВ X (D(X)) называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания, т.е. $D(X)=M(X-M(X))^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 P(x_i)$

9 Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется арифметический корень из дисперсии, т.е. $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Пример выполнения:

Исходные данные:

Приживаемость саженцев яблонь составляет 80%. Наудачу выбирают 5 саженцев. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев, функцию распределения, построить многоугольник распределения и график функции распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа прижившихся саженцев.

Решение:

1 Вероятность приживаемости яблони равна 0,8.

X – случайная величина числа прижившихся яблонь из пяти саженцев:

Возможные значения: $x1 = 0$ – ни один саженец не прижился;

$x2 = 1$ – один саженец прижился;

$x3 = 2$ – два прижились;

$x4 = 3$ – три;

$x5 = 4$ – четыре;

$x6 = 5$ – пять саженцев прижились.

2 Вероятности этих значений вычислим по формуле Бернулли:

$$P(x_1) = C_5^0 p^0 q^5 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}(0{,}8)^0(0{,}2)^5 = 0{,}00032$$

$$P(x_2) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}(0{,}8)^1(0{,}2)^4 = 5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}0016 = 0{,}0064$$

$$P(x_3) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}(0{,}8)^2(0{,}2)^3 = 10\cdot 0{,}64\cdot 0{,}008 = 0{,}0512$$

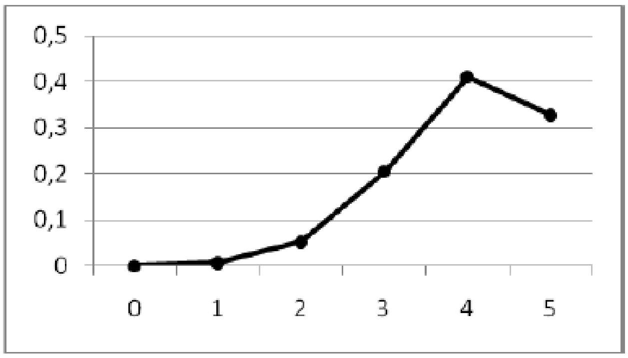
$$P(x_4) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}(0{,}8)^3(0{,}2)^2 = 10\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04 = 0{,}2048$$

$$P(x_5) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}(0{,}8)^4(0{,}2)^1 = 5\cdot 0{,}4096\cdot 0{,}2 = 0{,}4096 \quad P(x_6) = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}(0{,}8)^5(0{,}2)^0 = 0{,}32768$$

Таким образом, закон распределения случайной величины:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Многоугольник распределения:



Вычислим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases} 0; \quad \textit{если}\, x \le 0 \\ 0{,}00032; \quad \textit{если}\, 0 < x \le 1 \\ 0{,}00032+0{,}0064=0{,}00672; \quad \textit{если}\, 1 \le x < 2 \\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512=0{,}05792; \quad \textit{если}\, 2 \le x < 3 \\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048=0{,}26272; \quad \textit{если}\, 3 \le x < 4 \\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048+0{,}4096=0{,}67232; \quad \textit{если}\, 4 \le x < 5 \\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048+0{,}4096+0{,}32768=1; \quad \textit{если}\, x \ge 5 \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики случайной величины, для этого составим таблицу:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768
X-M(X)	-4	-3	-2	-1	0	1
$(X\text{-}M(X))^2$	16	9	4	1	0	1

Мат. ожидание: $$M(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i P(x_i)= =1\cdot 0{,}0064+2\cdot 0{,}0512+3\cdot 0{,}2048+4\cdot 0{,}4096+5\cdot 0{,}32768=4$$

Дисперсия: $$D(X)=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^2 P(x_i)= =16\cdot 0.00032+9\cdot 0{,}0064+4\cdot 0{,}0512+1\cdot 0{,}2048+0\cdot 0{,}4096+1\cdot 0{,}32768=0{,}8$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}89$

Задания:

1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

3. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелок делает выстрелы до первого промаха. Составить закон распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку, если всего имеется пять патронов. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

4. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа гербов при четырех подбрасываниях монеты. Построить полигон полученного распределения.

5. Два носка выбираются случайным образом из ящика, в котором находится 5 коричневых и 3 зеленых. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа коричневых носков. Построить полигон полученного распределения.

6. В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных однотипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

7. В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных однотипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества кондиционных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

8. В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества дефектных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

9. В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества качественных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

10. В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

11. В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар имеется в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

12. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых белых шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее

квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

13. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

14. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

15. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

16. Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

17. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества качественных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

18. Дискретная случайная величина – число мальчиков в семьях с 5 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества мальчиков. Построить полигон полученного распределения.

19. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

20. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго – 0,4. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

21. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

22. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу не красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

23. Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Построить полигон полученного распределения.

24. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

25. В коробке имеются 10 карандашей, из которых 4 синие. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу синих карандашей. Построить полигон полученного распределения.

26. Дискретная случайная величина – число девочек в семьях с 4 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества девочек. Построить полигон полученного распределения.

27. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,6, для второго – 0,7. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

28. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,8 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

29 Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

30 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попада-ний мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,6. Вы-числить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклоне-ние случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

31 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попада-ний мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,7. Вы-числить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклоне-ние случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

Перечень рекомендуемой учебной литературы, информационных ресурсов сети Интернет соответствует пункту 3.2. рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01. Прикладная математика специальности 27.02.03 Автоматика и телемеханика на транспорте (на железнодорожном транспорте)