ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Петрозаводский филиал ПГУПС

ОДОБРЕНО
на заседании цикловой комиссии ЕН
протокол № 8 от 28 апреля 2017 г.
Председатель цикловой комиссии:
Масайлова Т.А. (____)

УТВЕРЖДАЮ
Начальник УМО
________ А.В. Калько
«28» 04 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению практических занятий

По учебной дисциплине: ЕН.01. Математика

Специальность: 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям)

Разработчик: Писаренко А.С.

2017 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации и проведению практических занятий разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01. Математика и предназначено для выполнения практических занятий обучающимися.

Практические занятия по учебной дисциплине направлены на усвоение знаний, освоение умений и формирование элементов общих и профессиональных компетенций, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

знать:

значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;

основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

основы интегрального и дифференциального исчисления;

В результате освоения учебной дисциплины происходит поэтапное формирование элементов общих и профессиональных компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Читать и составлять электрические схемы электрических подстанций и сетей.

ПК 1.2. Выполнять основные виды работ по обслуживанию трансформаторов и преобразователей электрической энергии.

ПК 1.3. Выполнять основные виды работ по обслуживанию оборудования распределительных устройств электроустановок, систем релейных защит и автоматизированных систем.

ПК 1.4. Выполнять основные виды работ по обслуживанию воздушных и кабельных линий электроснабжения.

ПК 1.5. Разрабатывать и оформлять технологическую и отчетную документацию.

ПК 2.1. Планировать и организовывать работу по ремонту оборудования.

ПК 2.2. Находить и устранять повреждения оборудования.

ПК 2.3. Выполнять работы по ремонту устройств электроснабжения.

ПК 2.4. Оценивать затраты на выполнение работ по ремонту устройств электроснабжения.

ПК 2.5. Выполнять проверку и анализ состояния устройств и приборов, используемых при ремонте и наладке оборудования.

ПК 2.6. Производить настройку и регулировку устройств и приборов для ремонта оборудования электрических установок и сетей.

Рабочей программой предусмотрено выполнение обучающимися практических занятий, включая, как обязательный компонент практические задания с использованием персонального компьютера.

Распределение результатов освоения учебного материала в ходе выполнения заданий на практических занятиях происходит в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Распределение результатов освоения учебного материала

Раздел, тема	**Контрольно-оценочные мероприятия**	**Результаты**		**Поэтапно формируемые элементы общих и профессиональных компетенций**
		усвоенные знания	**освоенные умения**	
Раздел 1.Линейная алгебра				
Тема 1.1. Матрицы и определители	**Практическое занятие № 1** Вычисление определителей третьего порядка	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 2. ПК 1.5.
Тема 1.2. Системы линейных уравнений	**Практическое занятие № 2** Решение систем линейных уравнений по правилуКрамера для задач по электротехнике **Практическое занятие № 3** Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные математические методы решения прикладных задач в	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 1 ОК 2.. ПК 1.5.

		области профессиональной деятельности; значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;		
Раздел 2. Комплексные числа				
Тема 2.1. Три формы комплексного числа	**Практическое занятие № 4** Выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме. Построение геометрической модели. **Практическое занятие № 5** Решение заданий по переходу от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной. Выполнение действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 2. ОК 8. ПК 1.5.
Раздел 3. Математический анализ				
Тема 3.1. Дифференциальное и интегральное исчисление	**Практическое занятие № 6** Вычисление производных **Практическое занятие № 7** Вычисление простейших определенных интегралов. **Практическое занятие № 8** Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной. **Практическое занятие № 9** Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла	основы интегрального и дифференциального исчисления; основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности; значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ПК 1.1. ПК 1.2. ПК 1.3. ПК 1.4. ПК 1.5.
Тема 3.2. Дифференциальные уравнения	**Практическое занятие № 10** Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными	основы интегрального и дифференциального исчисления;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 2. ОК 8. ПК 1.5.
Тема 3.3. Ряды	**Практическое занятие № 11** Определения сходимости числового ряда по признаку Даламбера	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 2. ОК 9. ПК 1.5.
Раздел 4. Приближенные вычисления				
Тема 4.1. Приближенные	**Практическое занятие № 12**	основные понятия и методы математического	решать прикладные задачи в области профессиональной	ОК 1. ОК 2. ОК 4.

вычисления	Расчет электрической цепи с использованием погрешностей	анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности; значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;	деятельности	ОК 5. ОК 9. ПК 1.1. ПК 1.2. ПК 1.4. ПК 1.5. ПК 2.1. ПК 2.2. ПК 2.5. ПК 2.6.
Раздел 5.Основы дискретной математики				
Тема 5.1. Основы теории множеств	**Практическое занятие № 13** Выполнение операций над множествами	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 2. ОК 3. ОК 4. ОК 5. ПК 1.5.
Тема 5.2. Основы теории графов	**Практическое занятие № 14** Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта, в формировании технологического цикла оказания услуг на транспорте	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности; значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 4. ОК 5. ОК 9. ПК 1.3. ПК 1.4. ПК 1.5.
Раздел 6. Основы теории вероятности и математической статистики				
Тема 6.1. Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей	**Практическое занятие № 15** Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей. **Практическое занятие № 16** Решение задач на нахождение вероятности события при изучении и планировании рынка услуг на транспорте	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные математические методы решения прикладных задач в	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 4. ОК 5. ОК 6. ОК 7. ОК 9. ПК 1.2. ПК 1.3. ПК 1.4. ПК 1.5.

		области профессиональной деятельности;		ПК 2.1. ПК 2.2. ПК 2.3. ПК 2.4. ПК 2.5. ПК 2.6.
Тема 6.2. Случайная величина, ее функция распределения	**Практическое занятие № 17**По заданному условию построить ряд распределения случайной величины согласно закону распределения дискретной случайной величины	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 2. ОК 3. ОК 4. ОК 9. ПК 1.4. ПК 1.5.
Раздел 7. Основные численные методы				
Тема 7.1. Численное интегрирование	**Практическое занятие № 18** Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности	основы интегрального и дифференциального исчисления;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 2. ПК 1.5.
Тема 7.2. Численное дифференцирование	**Практическое занятие № 19** Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при n = 2), функции, заданной аналитически. Исследование свойств этой функции для определения эффективности планирования технического цикла эксплуатации электроснабжения на железнодорожном транспорте	основы интегрального и дифференциального исчисления; основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности; значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 1. ОК 2. ОК 8. ПК 1.5.
Тема 7.3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	**Практическое занятие № 20** Определение количества электроэнергии, затраченной на тягу поездов, в зависимости от плана и профиля пути с использованием метода Эйлера, решение обыкновенных дифференциальных уравнений	основы интегрального и дифференциального исчисления; основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности; значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;	решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	ОК 1. ОК 2. ОК 8. ПК 1.5. ПК 2.4. ПК 2.5. ПК 2.6.

Содержание практических занятий охватывает весь круг умений и компетенций, на формирование которых направлена учебная дисциплина.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1

Вычисление определителей третьего порядка

Практическое занятие № 2

Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера для задач по электротехнике

Практическое занятие № 3

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Практическое занятие № 4

Выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме. Построение геометрической модели.

Практическое занятие № 5

Решение заданий по переходу от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной. Выполнение действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Практическое занятие № 6

Вычисление производных

Практическое занятие № 7

Вычисление простейших определенных интегралов.

Практическое занятие № 8

Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной.

Практическое занятие № 9

Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла

Практическое занятие № 10

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Практическое занятие № 11

Определения сходимости числового ряда по признаку Даламбера

Практическое занятие № 12

Расчет электрической цепи с использованием погрешностей

Практическое занятие № 13

Выполнение операций над множествами

Практическое занятие № 14

Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта, в формировании технологического цикла оказания услуг на транспорте

Практическое занятие № 15

Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.

Практическое занятие № 16

Решение задач на нахождение вероятности события при изучении и планировании рынка услуг на транспорте

Практическое занятие № 17

По заданному условию построить ряд распределения случайной величины согласно закону распределения дискретной случайной величины

Практическое занятие № 18

Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности

Практическое занятие № 19

Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при $n = 2$), функции, заданной аналитически. Исследование свойств этой функции для определения эффективности планирования технического цикла эксплуатации электроснабжения на железнодорожном транспорте

Практическое занятие № 20

Определение количества электроэнергии, затраченной на тягу поездов, в зависимости от плана и профиля пути с использованием метода Эйлера, решение обыкновенных дифференциальных уравнений

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

При оценке освоенных умений при выполнении практических работ применяется пятибалльная шкала оценивания.

Оценивание практических занятий производится в соответствии со следующими нормативными актами:

- Положение о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;

- Положение о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий.

Практическое занятие №1

Вычисление определителей третьего порядка

Цель: Научиться вычислять определители третьего порядка

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Определителем второго порядка называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определителем третьего порядка называется число, равное

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

.

Замечание. Чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое **правило треугольников** (правило Саррюса). Оно заключается в следующем. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются на главной диагонали и в вершинах треугольников, симметричных относительно главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «–», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали

Для вычисления определителей третьего порядка можно пользоваться ещё правилом «3 × 5». *Согласно этому правилу к заданной матрице(определителю)* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *добавляют ещё первые два столбца* $\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right.$.

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», *располагаются на главной диагонали и на отрезках, параллельных главной диагонали*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «–», *располагаются на побочной диагонали и на отрезках, параллельных побочной диагонали*

Определитель detA равен сумме указанных произведений элементов с учетом их знаков.

Вычислить определитель матрицы $A = \|a_{i,j}\|$ третьего порядка разложением по элементам первой строки.

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Задания:

№	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант
1	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 & 1 \\ 5 & -11 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 9 & 6 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -8 & 1 \\ 5 & 1 & -11 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & 2 & -11 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};$	$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix};$	$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

Практическое занятие №2

Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера для задач по электротехнике

Цель:расширить представление о методах решения систем линейных уравнений (СЛУ) и отработать алгоритм решения СЛУ по правилу Крамера. Понять, где правило Крамера можно применить в электротехнике.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Решение систем уравнений через определители (Правило Крамера).

Пусть дана квадратная таблица из четырех чисел $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ (1)

Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется определителем второго порядка, соответствующего таблице (1). Этот определитель обозначается символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; соответственно имеем $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (2)

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются элементами определителя. Говорят, что элементы a_1, b_2 лежат на главной диагонали определителя Δ, a_2, b_1 - на побочной. Таким образом, определитель второго порядка вычисляется как произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали. Например, $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = -10$

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = h_1 \\ a_2x + b_2y = h_2 \end{cases}$, (3) с двумя неизвестными x, y. Введем обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix} \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (4), называется определителем этой системы. Определитель Δ_x получается путем замены элементов первого столбца определителя свободными членами системы (4); определитель Δ_y - при помощи замены свободными членами системы (4) элементов его второго столбца.

Если $\Delta \neq 0$, то система (4) имеет единственное решение; оно определяется формулами $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. (6)

Если $\Delta = 0$ и при этом хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля, то система (4) совсем не имеет решений (как говорят, уравнения этой системы несовместны).

Если же $\Delta = 0$, но также $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система (4) имеет бесконечно много решений (в этом случае одно из уравнений системы есть следствие другого).

Пусть в уравнениях системы (4) $h_1 = h_2 = 0$; тогда система (4) будем иметь вид: $\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$ (6)

Система уравнений вида (7) называется однородной; она всегда имеет нулевое решение; x=0, y=0. Если $\Delta \neq 0$, то это решение является единственным; если же $\Delta = 0$, то система (7), кроме нулевого, имеет бесконечно много других решений.

Система трех линейных уравнений с тремя переменными.

Систему линейных уравнений с тремя переменными можно привести к виду

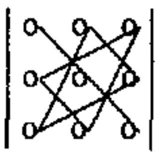
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \quad \textbf{(7)}$$

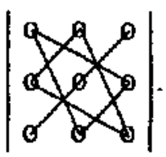
Индексы элементов системы (7) означают: первый- номер строки, а второй - номер столбца, где расположен этот элемент

Определителем третьего порядка *называется число, которое определяется по правилу:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}.$$

Правая часть выражения (1) состоит из алгебраической суммы шести членов, из которых три взяты со знаком плюс, а три - со знаком минус. Схематично правило раскрытия определителя можно представить так:





На левом рисунке схемы отмечены элементы, произведения которых берутся со знаком плюс, а на правом — со знаком минус.

Определитель третьего порядка обладает теми же свойствами, что и определитель второго порядка.

Пусть дана система (7) трех линейных уравнений с тремя переменными, определители которой равны:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Система (7) может быть решена следующим образом: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

1. Если $\Delta \neq 0$, а $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 > 0$, то система имеет единственное решение

2. Если $\Delta = 0$, а $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 > 0$, то система не имеет решений

3. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 = 0$, то система может иметь бесчисленное множество решений

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$

Решение. Составляем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 30$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5; \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 13; \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно,

$$x = \frac{5}{30} = 6; \; y = \frac{13}{30}; \; z = \frac{1}{30}$$

Задания:

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1) $\begin{cases} 5x+y-3z=-2; \\ 4x+3y+2z=16; \\ 2x-3y+z=17. \end{cases}$	1) $\begin{cases} 3x-2y+z=10; \\ x+5y-2z=-15; \\ 2x-2y-z=3. \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x-y+2z=-3; \\ x+2y-z=4; \\ 3x+y+3z=3. \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x-3y+z=-3; \\ x+5y-z=-1; \\ 3x+y+4z=11. \end{cases}$
3) $\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ 2x-y-z=1; \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$	3) $\begin{cases} 2x-y+z=2; \\ 3x+2y+2z=-2; \\ x-2y+z=1. \end{cases}$

Практическое занятие №3

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель: расширить представление о методах решения систем линейных уравнений (СЛУ) и отработать алгоритм решения СЛУ методом Гаусса.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Метод Гаусса

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной.При преобразовывать не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:
а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 3 и 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

б) третью строку умножим на (-5) и прибавим к ней вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}$$

В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ -5y + 10z = -7 \\ -10z = 13 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $z = -1{,}3$. Подставляя это значение во второе уравнение, имеем $y = -1{,}2$. Далее из первого уравнения получим $x = -0{,}7$.

Задания:

№	**1 вариант**	**2 вариант**	**3 вариант**
1	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=7; \\ 2x_1-3x_2+x_3=3; \\ 4x_1+x_2-x_3=16. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-x_3=4; \\ 3x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 8x_1+7x_2+3x_3=18 \\ -7x_1-4x_2-4x_3=-11 \\ -6x_1+5x_2-4x_3=-15 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1 \\ 4x_1-3x_2+4x_3=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6; \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18; \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4; \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=-3; \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=8; \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=6; \\ -x_1+2x_2+3x_3+5x_4=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5; \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=1; \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=6; \\ 6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=1. \end{cases}$

Практическое занятие № 4

Выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме. Построение геометрической модели

Цель:Закрепить умения выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Комплексными числами называются выражения вида $a+bi$, (где *a* и *b*действительные числа, а i - символ, удовлетворяющий условию $i^2=-1$).Для комплексных чисел равенство, сложение и умножение определяются следующим образом:

а) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i считаются *равными* тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$

б) *суммой* двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ (1.1),

в) произведением двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i \quad (1.2).$$

***Разность* двух комплексных чисел** – операция обратная сложению и может быть выполнена по формуле: $(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$ (1.3).

Пример. 1.1. Вычислить сумму и произведение двух комплексных чисел: $z_1=2+3i;\ z_2=4-2i$

Решение.

$z_1+z_2=(2+4)+(3-2)i=6+i;$

$z_1\cdot z_2=(2+3i)\cdot(4-2i)=2\cdot4-2\cdot2\cdot i+3\cdot4\cdot i-3\cdot2\cdot i\cdot i=8-4i+12i+6=14+8i$

Пример 1.2. Вычислить разность двух комплексных чисел: $z_1=-4+2i;\ z_2=3-i$

Решение

$z_1-z_2=(-4-3)+(2-(-1))i;=-7+3i$

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам сложения и умножения двучленов.

Число $\bar{z}=a-bi$ называется ***комплексно-сопряженным с комплексным числом*** $z=a+bi$.

Частное от деления одного комплексного числа на второе – операция обратная умножению и может быть выполнена по формуле:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (1.4)$$

Эту формулу можно не запоминать, а руководствоваться следующим правилом: *для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое, надо записать их в виде дроби, в числителе которой – делимое, а в знаменателе – делитель, а затем числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное со знаменателем.*

Пример 1.3. Вычислить частное от деления комплексного числа $z_1 = 14 + 8i$ на комплексное число $z_2 = 4 - 2i$

Решение

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(14+8i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{56+28i+32i-16}{4^2+2^2} = \frac{40+60i}{20} = 2+3i$$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда $a = b = 0$**.**

нужно решить уравнение $x^2 + 4x + 29 = 0$. Легко подсчитать, что

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 116 = -100 < 0$$

Следовательно, $\sqrt{D} = \sqrt{-100} = \sqrt{(-1)\cdot 100} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{100} = 10i$.

Поэтому $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-4 \pm 10i}{2} = -2 \pm 5i$

Степени мнимой единицы даются формулой

$$i^n = \begin{cases} i, & если\ n = 4k+1, \\ -1, & если\ n = 4k+2, \\ -i, & если\ n = 4k+3, \\ 1, & если\ n = 4k+4 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Например, $i^{47} = i^{4\cdot 11+3} = i^{-3} = -i$

1.1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

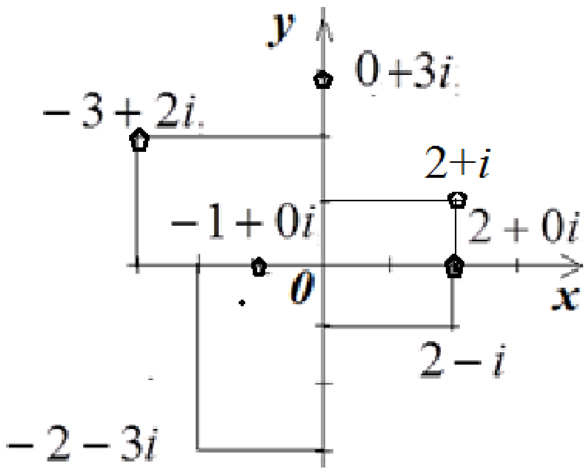
Пусть имеется комплексное число $z = x + yi$.

геометрически комплексные числа – это точки (x,y) на комплексной плоскости.

Пример 1.5. Данные числа изобразите на комплексной плоскости

$$а)2+i,\ б)2-i;\ в)-3+2i,\ г)-2-3i,\ д)2+0i,\ е)-1+0i,\ ж)0;+3i;\ -з)0;-3i$$

Решение



Задание:

Вариант 1

1. Вычислите $z_1 + z_2;\ z_1 - z_2;\ z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 1 + 4i \quad z_2 = 5 - i$
2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 2x + 10 = 0$
3. Выполните деление комплексных чисел: $\dfrac{1+4i}{5-i}$
4. Вычислите $\dfrac{5}{4 - i\sqrt{14}} - \dfrac{3}{2 - i\sqrt{14}}$
5. Найдите комплексно-сопряжённые числа и постройте их на координатной плоскости: $3 - 2i \quad 5i \quad 6 \quad -2 - i \quad i$
6. Докажите что сумма комплексно сопряжённых чисел есть действительное число.

Вариант 2

1. Вычислите $z_1 + z_2;\ z_1 - z_2;\ z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 1 + 3i \quad z_2 = 7 - i$
2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 2x + 17 = 0$
3. Выполните деление комплексных чисел: $\dfrac{1+3i}{7-i}$
4. Вычислите $\dfrac{3}{1+i} - \dfrac{5}{4-2i} + \dfrac{4}{1+i}$
5. Найдите комплексно-сопряжённые числа и постройте их на координатной плоскости: $2 - 3i \quad 4i \quad 5 \quad -3 - i \quad i$
6. Докажите что разность комплексно сопряжённых чисел есть мнимое число.

Вариант 3

1. Вычислите $z_1 + z_2;\ z_1 - z_2;\ z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 1 - 4i \quad z_2 = 5 + i$
2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 10x + 26 = 0$
3. Выполните деление комплексных чисел: $\dfrac{1-4i}{5+i}$
4. Вычислите $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$
5. Найдите комплексно-сопряжённые числа и постройте их на координатной плоскости: $4 - 3i \quad 3i \quad 4 \quad -6 - i \quad i$
6. Докажите что разность комплексно сопряжённых чисел есть мнимое число.

Вариант 4

1. Вычислите $z_1 + z_2;\ z_1 - z_2;\ z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 1 - 3i \quad z_2 = 7 + i$
2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 14x + 50 = 0$
3. Выполните деление комплексных чисел: $\dfrac{1-3i}{7+i}$
4. Вычислите $\dfrac{-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}}{5\sqrt{2} + 5i\sqrt{2}}$
5. Найдите комплексно-сопряжённые числа и постройте их на координатной плоскости: $3 - 4i \quad 6i \quad 3 \quad -4 - i \quad i$
6. Докажите что сумма комплексно сопряжённых чисел есть действительное число.

<u>Практическое занятие № 5</u>

Решение заданий по переходу от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной. Выполнение действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Цель: Научиться выполнять переход от алгебраической формы комплексного числа к показательной и тригонометрической форме и выполнять в них арифметические действия

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Алгебраическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r – модуль комплексного числа, а φ – один из его аргументов. Представление комплексного числа $z \neq 0$ в указанном виде называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и один из аргументов. Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно находить из системы $\begin{cases} \cos\varphi = a/r; \\ \sin\varphi = b/r. \end{cases}$

Пример. Записать число $z = -\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

<u>Решение</u>. Находим модуль

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

Находим угол

$$\alpha = arctg\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Вектор, соответствующий данному комплексному числу, лежит в III координатной четверти (рис. 4), поэтому одним из аргументов является $\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Следовательно,

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Для того чтобы перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ к алгебраической, достаточно найти действительные числа a и b по формулам $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Пример. Записать число $z = 2(\cos 330° + i\sin 330°)$ в алгебраической форме.

Решение. Сначала найдем $\cos 330°$ и $\sin 330°$: $\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\dfrac{1}{2}$.

Тогда $a = 2(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$, $b = 2(-1/2) = -1$. Следовательно, $z = 2(\cos 330° + i\sin 330°) = \sqrt{3} - i$.

Показательная форма комплексного числа.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, которая называется *показательной формой* записи.

Пример. Представить число $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ в алгебраической форме.

Решение. По условию, $r = 4,\ \varphi = \dfrac{5\pi}{6}$, откуда

$$a = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3},$$

$$b = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Значит, $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}} = -2\sqrt{3} + 2i.$

Пример. Выполнить действия и записать ответ в тригонометрической и показательной формах

$$z = 10\left(\frac{1+i}{2-i} + \frac{1-i}{4+2i}\right).$$

Решение. Сначала выполним действия:

$$z = 10\left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{(1-i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}\right) = 10\left(\frac{2+2i+i+i^2}{4-i^2} + \frac{4-4i-2i+2i^2}{16-4i^2}\right) =$$

$$= 10\left(\frac{1+3i}{5} + \frac{2-6i}{20}\right) = 10\,\frac{4+12i+2-6i}{20} = \frac{6+6i}{2} = 3+3i.$$

Теперь запишем число в тригонометрической и показательной формах, для чего найдем его модуль и аргумент

$$r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2}, \quad \varphi = \alpha = arctg\left|\frac{3}{3}\right| = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right), \quad z = 3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$

Задания:

Вариант 1	**1, 10, 11, 16, 21**
Вариант 2	**2, 9, 12, 17, 22**
Вариант 3	**3, 8, 13, 18, 23**
Вариант 4	**4, 7, 14, 19, 24**
Вариант 5	**5, 6, 15, 20, 25**

Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной формах:

1. $\frac{1+i}{1-2i}-(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i)$.

2. $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$.

3. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17}$.

4. $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12}$.

5. $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3})$

6. $\frac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i)$

7. $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$

8. $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$

9. $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5}$

10. $\frac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13})$.

Выполните действия в тригонометрической форме. Результат запишите в показательной и алгебраической формах:

11. $4(\cos 220°+i\sin 220°)\cdot 1{,}5(\cos 20°+i\sin 20°)$.

12. $3(\cos 280°+i\sin 280°):\frac{3}{4}(\cos 70°+i\sin 70°)$.

13. $(2(\cos 50°+i\sin 50°))^6$.

14. $\sqrt[3]{-8}$.

15. $3(\cos 340°+i\sin 340°):\frac{3}{8}(\cos 25°+i\sin 25°)$.

16. $\sqrt[4]{16}$.

Запишите комплексное число в тригонометрической и алгебраической формах:

17. $2e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

18. $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

19. $2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

20. $3{,}2e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

21. $1{,}6e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

22. $6e^{\frac{7\pi}{4}i}$

23. $8e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

24. $6e^{2\pi i}$

25. $4e^{\frac{11\pi}{6}i}$

Практическое занятие № 6

Вычисление производных

Цель:Закрепить умения вычислять производные

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ПРОИЗВОДНАЯ

Производные элементарных функций

1. $(C)'=0$	2. $(x)'=1$	3. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	5. $\left(e^x\right)' = e^x$
6 $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	7. $\left(\ln x = \frac{1}{x}\right)$	8. $\left(\sin x\right)' = \cos x$	9. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$	10. $tgx' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $ctgx' = -\frac{1}{\cos^2 x}$	12. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	13 $/(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$	14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования:

1. $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x); \ \left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$
2. $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $(kf(x))' = kf'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Производная сложной функции: $f(\varphi(x))' = f'(u)(\varphi'(x))$

Исследование функции

Рассмотрим последовательность выполнения операций при исследовании функции и построении ее графика на следующем примере.

Пример. Исследуйте функцию и постройте ее график $y = x\sqrt{x} - 6x$

Решение.

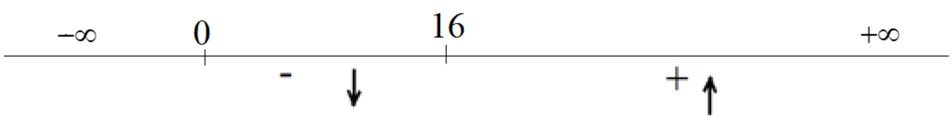
1) Область определения. $x \in [0,+\infty)$

2) Функция не периодическая.

3) Функция общего свойства, то есть не относится ни к четным, ни к нечетным, так как $y(-x) \neq y(x);\ y(-x) \neq -y(x).$.

3) Области возрастания-убывания.

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6; \quad \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6x = 0; \ \frac{9}{4}x = 36; \ 9x = 144; \ x = 16; \ x - 16 = 0$$



$x \in (0;16)$ - функция убывает; $x \in (16;+\infty)$ - функция возрастает

4) Точки экстремумов: при переходе через $x = 16$ первая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно при $x = 16$ имеем минимум. Для определения значения этого минимума подставим $x = 16$ в уравнение кривой:

$y(16)=16\sqrt{16}-6\cdot 16=64-96=-32.$ Таким образом, у графика функции имеется точка минимума с координатами (16; -32).
5) Точки пересечения с осями координат.

Для определения ординаты точки пересечения с осью Oy подставим в уравнение кривой $x=0$. В результате получим: $y(0)=0\sqrt{0}-6\cdot 0=0$.

Таким образом, график функции пересекает ось Oy при $y=0$.

Для определения абсциссы точки пересечения с осью Ox подставим в уравнение кривой $y=0$. В результате получим:

$$0=x\sqrt{x}-6x;\quad x(\sqrt{x}-6)=0;\quad x_1=0;\quad \sqrt{x}-6=0;\quad x_2=36.$$

Таким образом, график функции пересекает ось Ox в двух точках: при $x=0$ и $x=36$.

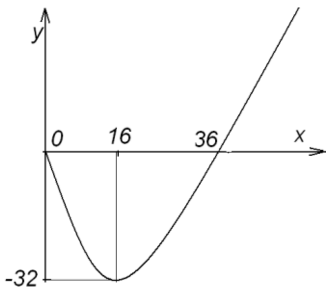
6) Области выпуклости-вогнутости.

Для определения участков вогнутости решаем неравенство: $y''=\frac{3}{4\sqrt{x}}>0$. Оно справедливо для любого x из области определения. Следовательно, график функции всюду вогнут.

Для определения участков выпуклости решаем неравенство: $y''=\frac{3}{4\sqrt{x}}<0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет участков выпуклости.

7) Точки перегиба:

Для определения точек перегиба решаем уравнение: $y''=\frac{3}{4\sqrt{x}}=0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.



8) Для построения графика функции начертим оси координат и отметим выявленные нами точки: минимума (16;-32) и пересечения с осями координат (0;0) и (36;0), а также области возрастания-убывания функции и ее вогнутости. В результате получим график, изображённый на рисунке.

Применение производной в геометрии

Производная функции $y=f(x)$ *в* некоторой точке x_0 численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке (x_0, y_0).

Касательной к графику функции $y=f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, называется прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $k=f'(x_0)$.

При названных условиях уравнение касательной имеет следующий вид:

$$y-y_0=f'(x)(x-x_0)$$

Механический смысл производной.

Если закон прямолинейного движения точки задан уравнением $s=f(t)$, где s- путь; t - время, то мгновенная скорость движения vв момент tопределяется равенствами

$$v=f'(t)=s',$$

т. е. скорость точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от пути s по времени.

Ускорение точки при прямолинейном движении в момент времени *t* есть производная от скорости*v* по времени или вторая производная от пути *s* по времени.

Задание:

Вариант 1

1. Найти производную функции

$$y=\left(x^4-2x^2-1\right)^7\ ;y=\ln\left(4x^3+2x+5\right);y=\cos(3x-2x^2)$$

2. Найти V(2), a(2), если

$$S=t^3+5t^2-4t-5$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=2x^3-6x^2-18x+7$$

Вариант 2

1. Найти производную функции

$$y=e^{2x^3+4};\ y=\sqrt{\left(2x^2-5\right)};\ y=\sin\left(4-x^3\right)$$

2. Найти V(1), a(1), если

$$S=2t^3+3t^2+2t-1$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=x^4-2x^2-5$$

Вариант 3

1. Найти производную функции

$$1)\ y=\left(3-5x\right)^6;2)\ y=\cos 3x;3)\ y=\left(2x+1\right)^{10}$$

2. Найти V(3), a(3), если

$$S=2t^3+4t^2-3t+5$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x-2$$

Вариант 4

1. Найти производную функции

$$1)\ y=(6x-1)^{-5};2)\ f(x)=\left(3-\frac{x}{2}\right)^5;3)\ y=\sin(3x^2-4)$$

2. Найти V(1), a(1), если

$$S=\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+3t$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y = 2x^3 - 3x^2$$

Вариант 5

1. Найти производную функции

$$y = \left(x^4 - 2x^2 - 1\right)^7 ;\ y = \ln\left(4x^3 + 2x + 5\right);\ y = \sin(4x - 3x^2)$$

2. Найти V(4), a(4), если

$$S = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + 5$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y = x^3 - 3x^2 + 7$$

Вариант 6

1. Найти производную функции

$$1)\ f(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 3\right)^{17};2)\ f(x) = \cos^2 x;3)\ f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$$

2. Найти V(3), a(3), если

$$S = 3t^3 - t^2 + 4t - 1$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y = 3x^4 + 16x^3 + 18x^2$$

Практическое занятие № 7

Вычисление простейших определенных интегралов

Цель: Закрепить умение вычислять определенные интегралы

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первообразная. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка существует производная* ***F'(x)****, равная $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.*

Множество первообразных для данной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается $\int f(x)dx = F(x)+C$,

где $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования; С - константа.

Неопределенные интегралы элементарных функций

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

Методы интегрирования

Ниже перечислены основные свойства интегралов.

1. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int a\cdot f(x)dx = a\int f(x)dx \quad (3.3)$$

2. *Интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов:*

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \quad (3.4)$$

3. *Вид интеграла не зависит от вида переменной интегрирования:*

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(dx)]+C. \quad (3.5)$$

или, что тоже самое,

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(dx)]+C,$$

где $\varphi(x)$ - функция, непрерывная вместе со своей производной.

Рассмотрим основные методы интегрирования:

I. *Непосредственное интегрирование.*

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример. Найти $\int\left(4x^3-15x^2+14x-3\right)dx$

Решение. Воспользуемся свойством 2. интеграла: интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих же функций.

$$\int\left(4x^3-15x^2+14x-3\right)dx=\int 4x^3dx-\int 15x^2dx+\int 14xdx-\int 3dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-15\frac{x^3}{3}+14\frac{x^2}{2}-3x+C=$$
$$=x^4-5x^3+7x^2-3x+C$$

II. ***Метод подстановки.***

Этот метод называют также *методом замены переменной.*

Пример. Найти $\int(2+x)^7dx$

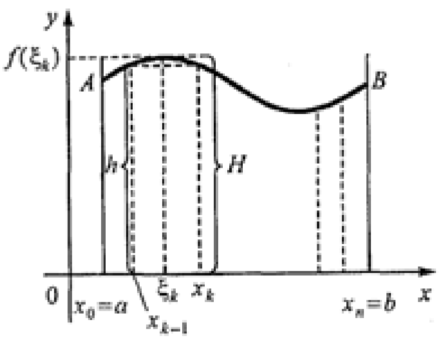
Решение. Введем новую переменную: $2+x=t;\ x=t-2;\ dx=dt$. Найдем интеграл:

$\int(2+x)^7dx=\int t^7dt=\dfrac{t^8}{8}+C$ Выразим результат через первоначальный аргумент:

$$\int(2+x)^7dx=\frac{(2+x)^8}{8}+C$$

Определенный интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции. *Дана плоская фигура, ограниченная графиком функции* $y=f(x)>0$ *и отрезками прямых* $y=0,\ x=a,\ x=b$. *Функция* $y=f(x)$ *определена, не*прерывна и неотрицательна в промежутке $[a,b]$. Вычислить площадь S полученной фигуры $aABb$, называемой *криволинейной трапецией.*



Определение. *Предел* $S=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ *называют* **определенным интегралом** *от функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a,\ b]$ *и обозначают* $\int_a^b f(x)dx$ *т. е.*

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

Число a *называется* **нижним пределом** *интеграла,* b**-верхним**.

Промежуток $[a,\ b]$ *называется* **промежутком интегрирования**, x**-переменной интегрирования.**

Теорема. *Определенный интеграл функции* $f(x)$, *непрерывной на промежутке [a, b], равен разности значений любой ее первообразной в точках* b *и* a

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$ *формулы Ньютона-Лейбница.*

Пример. Вычислить $\int_{-2}^{3}xdx$

Решение. Находим неопределенный интеграл: $\int_{-2}^{3}xdx=\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}$ Найдя значение $\dfrac{x^2}{2}$ сначала при $x=3$, а затем при $x=-2$, вычислим разность:

$$\int_{-2}^{3}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}=\frac{3^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=\frac{9-4}{2}=2{,}5$$

Приложения определенного интеграла в механике

Путь, пройденный телом при неравномерном движении за время $t_2 - t_1$, вычисляется по формуле: $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt,\ f(t) = v$.

Пример. Скорость движения материальной точки задана уравнением $v = 9t^2 - 8t,\ м/с$. Определить ее путь за четвертую секунду.

Решение. $t_1 = 3с, \quad t_2 = 4с$

$$S = \int_3^4 \left(9t^2 - 8t\right)dt = \left(3t^3 - 4t^2\right)\Big|_3^4 = \left(3\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2\right) - \left(3\cdot 3^3 - 4\cdot 3^2\right) = 128 - 45 = 83м.$$

Ответ *83 м*.

Пример. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2 м/с$. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение Скорость движения тела равна пулю в моменты начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно *t*:

$12t - 3t^2 = 0;\ 3t(4-t) = 0;\ t_1 = 0;\ t_2 = 4$ t_1, t_2 - пределы интегрирования.

$$S = \int_0^4 \left(12t - 3t^2\right)dt = \left(6t^2 - t^3\right)\Big|_0^4 = 6\cdot 4^2 - 4^3 = 32м$$ **Ответ.** *S = 32 м.*

Задание:

Вариант 1.

1. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-2}^{2} 5x^4 dx$,

   $\int_{1}^{2} \left(4x^3 - 6x^2 + 2x + 1\right) dx$ и $\int_{4}^{25} \frac{3}{\sqrt{x}} dx$.

2. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2} (4x-3)^3 dx$.

3. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V = 8t + 1$.

Вариант 2.

1. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-2}^{1} 12x^3 dx$,

   $\int_{2}^{3} \left(3x^2 + 6x - 2\right) dx$ и $\int_{9}^{16} \frac{2}{\sqrt{x}} dx$.

2. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2} (5x-4)^2 dx$.

3. Найдите путь, пройденный телом за 4 секунды, если его скорость определяется формулой: $V = t + 6$.

Вариант 3.

1. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-1}^{2} 16x^3 dx$,

   $\int_{2}^{3} \left(3x^2 - 4x - 1\right) dx$ и $\int_{1}^{4} \frac{4}{\sqrt{x}} dx$.

2. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2} (4x-2)^2 dx$.

3. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V = 2t + 3$.

Вариант 4.

1. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-3}^{1} 8x^3 dx$

   $\int_{0}^{1} \left(3x^3 - 5x^2 + x + 2\right) dx$ и $\int_{1}^{9} \frac{5}{\sqrt{x}} dx$.

2. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2} (6x-5)^2 dx$.

3. Найдите путь, пройденный телом за 3 секунды, если его скорость определяется формулой: $V = 10t - 8$.

Практическое занятие № 8

Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной

Цель:Научитьсянаходить экстремумы с помощью производной, при решении электротехнических задач

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

В электротехнике большое значение имеют задачи на поиск оптимального решения: расчет параметров электротехнических приборов, при которых в цепи будет наименьшее сопротивление или наибольшая мощность.

Задача. Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого равна 3В, а внутреннее сопротивление равно 2Ом. Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?

Мощность, потребляемая электронагревательным прибором, сопротивление которого равно R, находится по формуле $P=\frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. Обозначим сопротивление прибора R = x. С учетом данных задачи составим функцию $y=P(x)=\frac{9x}{(2+x)^2}=\frac{9x}{x^2+4x+4}$. Область определения этой функции промежуток (0; + ∞). Исследуем полученную функцию на экстремум.

$$y'=P'(x)=\left(\frac{9x}{x^2+4x+4}\right)'=\frac{36-9x^2}{(x^2+4x+4)^2}$$

Критические точки найдутся из уравнения $36-9x^2=0$.

x_1 = – 2 точка не входит в область определения функции.

x_2 = 2

Найдем знак производной на каждом промежутке

(0; 2) $y'>0$

(2; +∞) $y'<0$

Так как при переходе через точку x = 2 производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Значит, мощность, потребляемая прибором, будет наибольшей, если сопротивление его равно 2 Ом.

Рассмотрим цепь переменного тока, состоящую из источника переменного напряжения, активного сопротивления R, конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L.

Полное сопротивление этой цепи находят по формуле $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$, где ω – циклическая частота $\omega=2\pi\nu$, ν – частота переменного тока.

Задача. При какой частоте переменного тока полное сопротивление цепи будет наименьшим?

Обозначим ω = x. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{R^2+\left(Lx-\frac{1}{Cx}\right)^2}$.

Область определения функции (0; + ∞).

Найдем производную функцию.

$$y' = \frac{\left(R^2 + \left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)^2\right)'}{2\sqrt{R^2 + \left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)^2}} = \frac{0 + 2\left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)\left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)'}{2\sqrt{R^2 + \left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)^2}} = \frac{2\left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)\left(L + \frac{1}{Cx^2}\right)}{2\sqrt{R^2 + \left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)^2}} = \frac{L^2x - \frac{1}{C^2x^3}}{\sqrt{R^2 + \left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)^2}}$$

.

Приравняем производную к нулю и найдем критические точки.

$$\frac{L^2x - \frac{1}{C^2x^3}}{\sqrt{R^2 + \left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)^2}} = 0$$

$L^2x - \frac{1}{C^2x^3} = 0$; $L^2C^2x^4 - 1 = 0$; $x^4 = \frac{1}{L^2C^2}$; $x = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – критическая точка.

Для ответа на вопрос: Что будет иметь функция в этой точке – наибольшее или наименьшее значение?– найдем вторую производную.

$$y'' = \left(\left(L^2 x - 1/(C^2 x^3)\right)/\sqrt{\left(R^2 + (Lx - 1/Cx)^2\right)}\right)' =$$

$$= \left(\left(L^2 x - 1/(C^2 x^3)\right)\right)' \cdot \sqrt{\left(R^2 + (Lx - 1/Cx)^2\right)} -$$

$$- \left(L^2 x - 1/(C^2 x^3)\right) \cdot \left(\sqrt{\left(R^2 + (Lx - 1/Cx)^2\right)}\right)' / \left(R^2 + (Lx - 1/Cx)^2\right) =$$

$$\frac{L^2R^2 - \frac{2L^3}{C} + \frac{6L^2}{C^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2} + \frac{3R^2}{C^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^4} - \frac{6L}{C^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^4} + \frac{2}{C^4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^6}}{\left(\sqrt{R^2 + \left(L \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{C \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}}\right)^2}\right)^3}$$

Найдем значение второй производной при $x = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = \frac{L^2R^2 - \frac{2L^3}{C} + \frac{6L^2}{C^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2} + \frac{3R^2}{C^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^4} - \frac{6L}{C^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^4} + \frac{2}{C^4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^6}}{\left(\sqrt{R^2 + \left(L \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{C \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}}\right)^2}\right)^3} = \frac{4R^2L^2}{R^3} = \frac{4L^2}{R}$$

.

Вторая производная при $x = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ положительная, значит, функция $y = \sqrt{R^2 + \left(Lx - \frac{1}{Cx}\right)^2}$ в точке $x = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ принимает наибольшее значение. Следовательно, полное сопротивление цепи переменного тока, содержащей активное сопротивление, конденсатор и катушку индуктивности наименьшее при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ или $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.Найдем это сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{C \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}}\right)^2} = R$.

Задача. Составлена электрическая цепь из:

- источника переменного напряжения регулируемой частоты, диапазон генерируемых частот у него от 20 Гц до 20000 Гц. Для удобства наблюдения за изменением частоты переменного напряжения воспользуемся динамиком
- конденсатора емкостью 4 мкФ;
- катушки с индуктивностью 0,32мГн;
- электрической лампочки от карманного фонаря.

Полное сопротивление этой цепи принимает наибольшее значение, равное ее активному сопротивлению при $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14\sqrt{4 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}32 \cdot 10^{-3}}} = 4500\text{Гц}$.

Сила тока при этом, согласно закону Ома, достигает наибольшего значения Значит при частоте переменного тока 4500Гц яркость лампочки будет максимальная

Задание:

Найти:

а) критические точки функций,

б) экстремумы функций

в) наибольшее и наименьшее значения функций на указанном промежутке

1. $y=(x-3)^2(x-2)$.	[1;4]	1.$y=2x^4-x$.	[-1;1]
2. $y=1/3x^3+x^2$	[-4;1]	2. $y=x^2-2/x$.	[-3;-0,5]
3. $y=1/3x^3-x^2-3x$	[-2;6]	3. $y=1/(x^2+1)$.	[-1;2]
4. $y=-1/4x^4+2x^2+1$.	[-3;3]	4. $y=3x-x^3$.	[-1,5;1,5]
5. $y=x^4-8x^2-9$.	[-3;3]	5. $y=2x^2-x^4$.	[-2;1,5]
6. $y=(x-2)(x+1)^2$.	[-1,5;1,5]	6. $y=3x^{2/3}-x^2$.	[-8;8]
7. $y=-2/3x^3+2x-4/3$.	[-1,5;1,5]	7. $y=3x^{1/3}-x$.	[-8;8]
8. $y=3x^5-5x^4+4$.	[-1;1]	8. $y=x^3-1,5x^2-6x+4$.	[-2;3]
9. $y=9x^2-9x^3$.	[-0,5;1]	9. $y=(1-x)/(x^2+3)$.	[-2;5]
10. $y=1/3x^3-4x$.	[-3;3]	10. $y= -x^4+2x^2+3$.	[-0,5;2]

Практическое занятие № 9

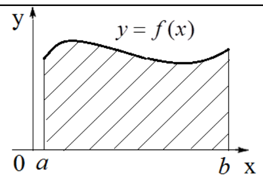
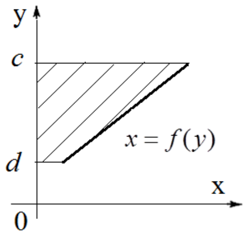
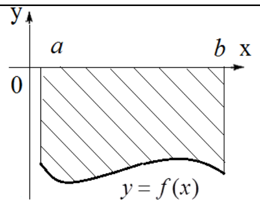
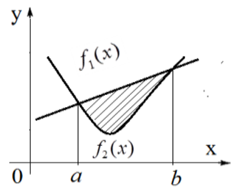
Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла

Цель: Закрепить умение вычислять площади криволинейных трапеций и объемы фигур с помощью интеграла

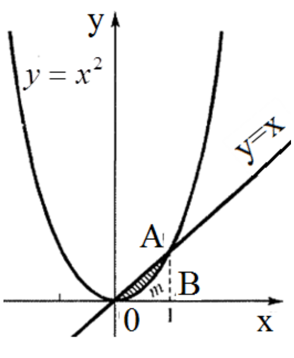
Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Площади плоских фигур и объемы тел вращения
Формулы для вычисления площади плоской фигуры.

Тип условия задачи	Чертеж	Формула
1		$S=\int_a^b f(x)dx$
2		$S=\int_d^c f(y)dy$
3		$S=-\int_a^b f(x)dx$
4		$S=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную графиками функций: $y=x^2$; $y=x$



Решение. Построим графики данных функций, найдя прежде точки их пересечения путем решения системы: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$. Решив эту систему, получим точки O(0; 0) и A(1; 1).

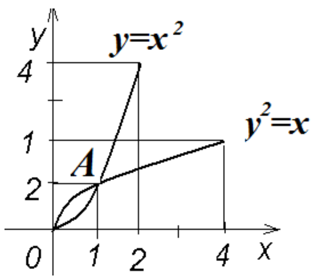
В данном случае подходит тип условия 4 задачи.

$$S=\int_0^1 (x-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ кв.ед.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная линией $y=f(x)\geq 0$ ***и прямыми*** $y=0;\ x=a;\ x=b$***, вращается вокруг оси x, то объем тела вращения вычисляется по формуле:*** $V=\pi\int_a^b y^2dx$

Если фигура, ограниченная линиями $y_1=f_1(x)\geq 0$ ***и*** $y_2=f_2(x)\geq 0$ $(0\leq f_1(x)\leq f_2(x))$ ***прямыми*** $x=a;\ x=b$***, вращается вокруг оси*** Ox***, то объем тела вращения вычисляется по формуле:*** $V=\pi\int_a^b\left(y_2^2-y_1^2\right)dx$

Пример. Найдите объем тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями: $y^2=x;\ y=x^2$



Решение. Определим координаты точки пересечения этих линий из системы:

$$\begin{cases} y^2=x \\ y=x^2 \end{cases};\ y^4=y;\ y(y^3-1)=0;\ y_1=0;\ y_2=1;\ x_1=0;\ x_2=1$$

.

Таким образом, имеем две точки пересечения линий: $O(0;0),\ A(1;1)$. По формуле имеем:

$$V=\pi\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\pi\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi(куб.ед.).$$

Задание:

Вариант 1	Вариант 2
1-7	8-14

№	
1.	Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 6$ и прямой $y = 7 - x$.
2.	Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, \quad y = 0$.
3.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x; \quad y = x.$
4.	Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy линии, $y = x^2 + 1$ в пределах от $a = 2$ до $b = 4$.
5.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + x$ и $y = 0$.
6.	Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной линиями, $y^2 = 9x$ и $y = 3x$.
7.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями; $y = \frac{1}{3}x^3; y = 0; x = -1; x = 2$
8.	Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной линиями, $y^2 = 4x$ и $y = x$.
9.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; \quad y = 2x + 8.$
10.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x; \quad y = x.$
11.	Вычислить объем тела, образованного, вращением одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ вокруг оси Ox.
12.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 16x; \quad x^2 = 2y$
13.	Вычислить объем тела, образованного вращением кривой $xy = 1$ вокруг оси Ox в пределах от $x = 2$ до $x = 3$.
14.	Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - x^2$ и осью Ox.

Практическое занятие № 10

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$f(x,\ y,\ y') = 0$$

или

$$y' = F(x,\ y).$$

Определение ***Решением дифференциального уравнения первого порядка*** *называется функция $y = \varphi(x)$, один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.*

Пример *Решить уравнение*

$$y' = x.$$

Р е ш е н и е. Решением уравнения является функция $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$, где C — произвольная действительная постоянная.

Определение ***Общим решением дифференциального уравнения*** *называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения.*

Таким образом, если решение дифференциального уравнения задается формулой $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$, то она задает общее решение, если

1. при каждом фиксированном $C = C_0$ эта функция определяет решение;
2. любое решение может быть найдено из этой формулы при некотором $C = C_0$.

Определение ***Частным решением дифференциального уравнения*** *называется решение, полученное из формулы (формул) общего решения при некотором значении $C = C_0$.*

В примере формула $y = \frac{x^2}{2} + C$ задает общее решение, а, например, решения $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$ — частные решения.

Найти решение дифференциального уравнения — значит выразить решение в квадратурах — через элементарные функции и их неопределенные интегралы.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение . ***Уравнениями с разделяющимися переменными*** *называются уравнения вида*

$$y' = f(x)g(y)$$

или

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0.$$

Метод разделения переменных (формальный).

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

Умножив уравнение на $\frac{dx}{g(y)}$, получим

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{g(y)} & = & f(x)dx, \\ g(y) & \neq & 0, \end{array}\right. \\ g(y) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow y(x) \text{ — делаем проверку, подставляя в уравнение.}$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

откуда находим решение в виде $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$.

Замечание Общее решение может не задаваться одной формулой. Иногда форма его записи зависит от способа записи постоянной или от метода интегрирования.

Пример *Решить уравнение* $y' = xy^2$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{y^2} & = & xdx, \\ y & \neq & 0, \end{array}\right. \\ y = 0. \end{array}\right.$$

$y \equiv 0$ — решение, проверяется подстановкой в уравнение.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

Отметим, что решение $y(x) \equiv 0$ не получается из этой формулы ни при каком значении C, поэтому общее решение определяется их совокупностью.

Задание:

Вариант 1

1. Выяснить является ли данная функция решением д у
   $y = 5e^{-2x} - 2x + 1, y' + 2y = -4x$
2. Решите д у с разделёнными переменными $2ydy = 3x^2 dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $2xdy = (y+2)dx$; $xy' - y = 0$
4. Найдите частное решение, если: $y' = y, y(-2) = 4$

Вариант 2

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = \cos 2x, y' + 2xy = 0$
2. Решите д у с разделёнными переменными $3y^2 dy = 4x^3 dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $(x-2)dy = 2ydx.$; $xy' = yx^2$
4. Найдите частное решение, если: $xy' + y = 0, y(-2) = 8$

Вариант 3

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = x + Ce^x, (x - y + 1)y' = 1$
2. Решите д у с разделёнными переменными $3y^2 dy = 2xdx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $2xdy = (y-2)dx$; $yy' + x = 0$
4. Найдите частное решение, если: $2\sqrt{y}dx = dy, y(0) = 1$

Вариант 4

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y = 3e^{-x} - x + 1, y' + y = -x$
2. Решите д у с разделёнными переменными $4y^3 dy = 3x^2 dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $(x+2)dy = 2ydx.$; $x^2 y' + y = 0$
4. Найдите частное решение, если: $x^2 y' + y^2 = 0, y(-1) = 1$

Практическое занятие № 11

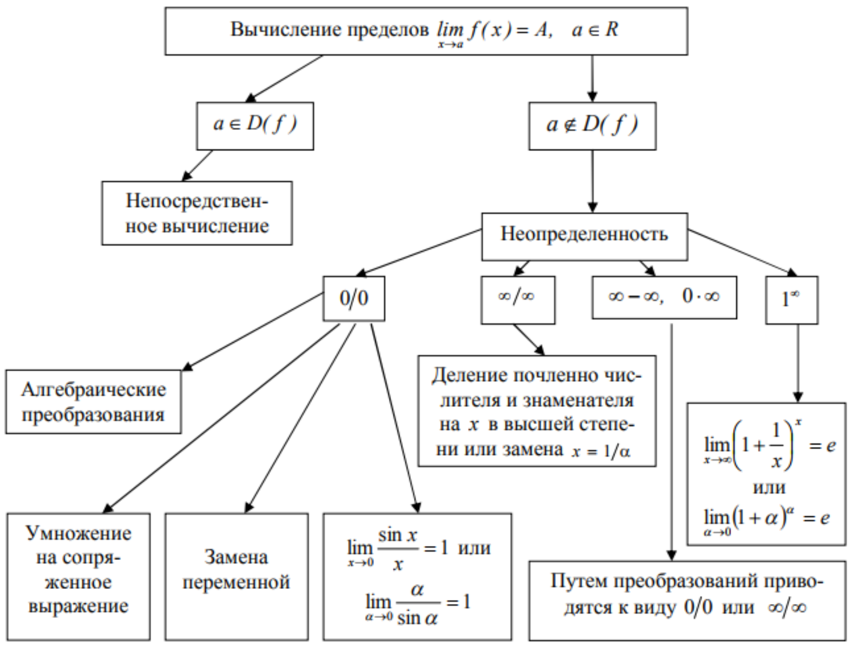
Определение сходимости числового ряда по признаку Даламбера

Цель: Научиться определять сходимость числовых рядов

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Способы вычисления пределов



Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданной отношением двух многочленов, существует два способа:

1) каждый член числителя и знаменателя необходимо разделить на x в наивысшей степени;

2) применить метод замены переменной: $x=\frac{1}{\alpha}$ (при $x\to\infty$ $\alpha\to 0$).

Пример Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

1 способ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{4}{x}}=\frac{2}{3}$, так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{4}{x}$ стремится к нулю.

а) Дробно-рациональные функции. В этом случае: в числителе и знаменателе выделяется множитель $(x-a)$ и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель;

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Применим способ группировки слагаемых в числителе и знаменателе дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

б) Дробно-иррациональные функции. Для избавления от неопределенности в этом случае существует два способа:

1) умножение числителя и знаменателя дроби на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

2) метод замены переменной.

В результате таких преобразований удается свести данный случай к уже рассмотренному в предыдущем пункте.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}x=t^6,\sqrt{x}=t^3,\sqrt[3]{x}=t^2,\\ x\to 1\Rightarrow t\to 1\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

в) Пределы от функций, в которых участвуют *тригонометрические выражения*, обычно сводятся к *первому замечательному пределу*.

Теорема (признак Даламбера). Если в ряде с положительными членами $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ отношение $(n+1)$-го члена ряда к n-му при $n\to\infty$ имеет конечный предел D, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D$, то:- ряд сходится в случае $D<1$,- ряд расходится в случае $D>1$.В случаях, когда предел не существует или он равен единице, ответа на вопрос о сходимости или расходимости числового ряда теорема не дает. Необходимо провести дополнительное исследование.

Задание:

Вариант 1

1. Найдите вторые члены рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$;

2. Найдите частичную сумму S_2 для рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n+1)(n+2)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n+1)n$

3. Выясните, сходится или расходится ряд, используя необходимый признак сходимости:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n-7}{7n^2+10n-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^5-4n^4+1}{1-4n^3+7n^4}$;

4. Выясните, сходится или расходится ряд, используя достаточный признак сходимости (Даламбера):

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdots(2n+5)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$

Вариант 2

1. Найдите вторые члены рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$;

2. Найдите частичную сумму S_2 для рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

3. Выясните, сходится или расходится ряд, используя необходимый признак сходимости:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^4+4}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)(n^2+4)}{2n^4+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2n+5}{1+10n+7n^2}$;

4. Выясните, сходится или расходится ряд, используя достаточный признак сходимости (Даламбера):

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^{3n+2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{3\cdot7\cdot11\cdots(4n-1)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^4}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{1\cdot4\cdot10\cdots(3n+1)}$

Практическое занятие № 12

Расчет электрической цепи с использованием погрешностей

Цель:Закрепить умения рассчитывать погрешности

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Погрешности измерений

Погрешность является одной из основных характеристик средств измерений.

Под *погрешностью* электроизмерительных приборов, измерительных преобразователей и измерительных систем понимается отклонение их выходного сигнала от истинного значения входного сигнала.

Абсолютная погрешность Δ_a прибора есть разность между показанием прибора a_x и истинным значением а измеряемой величины, т.е.

$$\Delta_a = a_x - a.$$

Абсолютная погрешность, взятая с обратным знаком, называется *поправкой*.

Относительная погрешность δ представляет собой отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины. Относительная погрешность, обычно выражаемая в процентах, равна

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a} \cdot 100\%.$$

Приведенная погрешность $\gamma_П$ есть выраженное в процентах отношение абсолютной погрешности Δ_a к нормирующему значению $a_{пр}$

$$\gamma_П = \frac{\Delta_a}{a_{пр}} \cdot 100\%.$$

Нормирующее значение – условно принятое значение, могущее быть равным конечному значению диапазона измерений (предельному значению шкалы прибора).

Погрешности средств измерений

Класс точности прибора указывают просто числом предпочтительного рода, например, **0,05**. Это используют для измерительных приборов, у которых предел допускаемой приведенной погрешности постоянен на всех отметках рабочей части его шкалы (присутствует только аддитивная погрешность). Таким способом обозначают классы точности вольтметров, амперметров, ваттметров и большинства других однопредельных и многопредельных приборов с равномерной шкалой.

Класс точности прибора (например, амперметра) дается выражением

$$K_А = \frac{\Delta_I}{I_{пр}} \cdot 100.$$

При установлении классов точности приборов нормируется приведенная погрешность, а не относительная. Причина этого заключается в том, что *относительная погрешность по мере уменьшения значений измеряемой величины увеличивается*.

По ГОСТ 8.401-80 в качестве значений класса точности прибора используется отвлеченное положительное число из ряда:

$$\{1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 4;\ 5;\ 6\} \cdot 10^{\alpha},\ \alpha = 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ ...$$

В интервале от 1 до 100 можно использовать в качестве значений класса точности числа:

(α = 0) 1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6;

(α = 1) 10; 15; 20; 25; 40; 50; 60.

Т.е. четырнадцать чисел 1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6; 10; 15; 20; 25; 40; 50; 60.
Необходимо отметить, классы точности от 6,0 и выше считаются очень низкими.

Примеры решения задач

Задача №1

Определить для вольтметра с пределом измерения 30 В класса точности **0,5** относительную погрешность для точек 5, 10, 15, 20, 25 и 30 В и наибольшую абсолютную погрешность прибора.

Решение

1. Класс точности указывают просто числом предпочтительного рода, например, **0,5**. Это используют для измерительных приборов, у которых предел допускаемой приведенной погрешности постоянен на всех отметках рабочей части его шкалы (присутствует только аддитивная погрешность). Таким способом обозначают классы точности вольтметров, амперметров, ваттметров и большинства других однопредельных и многопредельных приборов с равномерной шкалой.

Приведенная погрешность (выраженное в процентах отношение абсолютной погрешности к нормирующему значению)

$$\gamma_П = \frac{\Delta U}{U_{пр}} \cdot 100 = K - \text{const}$$

постоянна и равна классу точности прибора.

Относительная погрешность однократного измерения (выраженное в процентах отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины)

$$\delta = \frac{\Delta U}{U_{изм}} \cdot 100 = K \cdot \frac{U_{пр}}{U_{изм}}$$

уменьшается к значению класса точности прибора с ростом измеренного значения к предельному значению шкалы прибора.

Абсолютная погрешность однократного измерения

$$\Delta U = \frac{K \cdot U_{пр}}{100}$$

постоянна на всех отметках рабочей части шкалы прибора.

По условию задачи: $U_{изм} = U_i =$ 5, 10, 15, 20, 25 и 30 В – измеренное значение электрической величины; $U_{пр}$ = 30 В – предел шкалы вольтметра.

2. Приведенная погрешность

$$\gamma_П = \frac{\Delta U}{U_{пр}} \cdot 100 = K = 0,5\%.$$

3. Наибольшая абсолютная погрешность вольтметра

$$\Delta U = \frac{K \cdot U_{пр}}{100} = \frac{0,5 \cdot 30}{100} = 0,15 \text{ В}.$$

4. Относительная погрешность вольтметра для точек

$U_{изм} = U_i$, В	5	10	15	20	25	30
δ_U, %	3,0	1,5	1,0	0,75	0,6	0,5

Задача №2

При измерении напряжения двумя параллельно включенными вольтметрами их показания были: U_1 = 29,2 В, U_2 = 30 В. Показания какого прибора точнее, если класс точности K_{V1} = 2,5, K_{V2} = 1,0, а пределы измерения соответственно равны $U_{пр1}$ = 30 В; $U_{пр2}$ = 150 В.

Решение

Класс точности указывают просто числом предпочтительного рода, например, **0,05**. Это используют для измерительных приборов, у которых предел допускаемой приведенной погрешности постоянен на всех отметках рабочей части его шкалы (присутствует только аддитивная погрешность).

Тогда абсолютные погрешности измерения напряжения вольтметрами

$$\Delta U_1 = \frac{K_{V1} \cdot U_{пр1}}{100} = \frac{2.5 \cdot 30}{100} = 0.75 \text{ В;}$$

$$\Delta U_2 = \frac{K_{V2} \cdot U_{пр2}}{100} = \frac{1.0 \cdot 150}{100} = 1.5 \text{ В.}$$

Более точным будет первый вольтметр.

Задача №3

Ток 159 мА измеряется цифровым вольтметром с трехразрядным цифровым индикатором и амперметром с классом точности 0,5 и пределом шкалы 250 мА. Каким прибором ток будет измерен точнее?

Решение

Абсолютная погрешность однократного измерения амперметром

$$\Delta I = \frac{K \cdot I_{пр}}{100}.$$

где $I_{пр}$ – измеренное значение электрической величины;

K – класс точности прибора.

Относительная погрешность однократного измерения амперметром

$$\delta_I = \frac{\Delta I}{I_{изм}} \cdot 100 = K \frac{I_{пр}}{I_{изм}},$$

где $I_{изм}$ – предел шкалы амперметра.

В задаче наряду с аналоговым измерительным прибором используется цифровой. Абсолютная погрешность ΔI цифрового прибора принимается равной единице младшего разряда числа, высвечиваемого на цифровом индикаторе.

Класс точности аналогового амперметра пределом шкалы $I_{пр}$ = 250 мА выражается одним числом K = 0,5. Оценка погрешности однократного измерения аналогового амперметра

$$\Delta I = \frac{K \cdot I_{пр}}{100} = \frac{0,5 \cdot 250}{100} = 1,25 \text{ мА.}$$

Ток $I_{изм}$ = 159 мА измеряется цифровым вольтметром с трехразрядным цифровым индикатором. Абсолютную погрешность ΔI цифрового прибора принимается равной единице младшего разряда числа, высвечиваемого на цифровом индикаторе: ΔI = 1 мА.

Откуда, абсолютная погрешность цифрового амперметра меньше чем аналогового.

Следовательно, цифровой вольтметр точнее измеряет ток $I_{изм}$ = 159 мА.

Задача №4

Значения класса точности аналогового вольтметра K = 0,5.

Какой будет относительная и абсолютная погрешности однократных измерений напряжения $U_{изм}$ = 1; 3; 9 В на пределе измерения $U_{пр}$ = 10 В?

Решение

Класс точности прибора выражается одним числом K. Предельная погрешность

$$\gamma_{пр} = \frac{\Delta A}{A_{пр}} \cdot 100 = K,$$

где ΔA – абсолютная погрешность, $A_{пр}$ – предел шкалы измерительного прибора.
Для оценки погрешности однократного измерения полагаем абсолютную погрешность

$$\Delta A = \frac{K \cdot A_{пр}}{100}.$$

Относительная погрешность однократного измерения

$$\delta = \frac{\Delta A}{A_{изм}} \cdot 100 = K \frac{A_{пр}}{A_{изм}},$$

где $A_{изм}$ – измеренное значение электрической величины.
Класс точности аналогового вольтметра с пределом шкалы $U_{пр}$ = 10 В при измерении постоянного напряжения выражается одним числом K = 0,5.
Относительная погрешность однократных измерений напряжения $U_{изм}$ = 1; 3; 9 В:

$$U_{изм} = 1 \text{ В}; \ \delta = K \cdot \frac{U_{пр}}{U_{изм}} = 0{,}5 \cdot \frac{10}{1} = 5\%;$$

$$U_{изм} = 3 \text{ В}; \ \delta = K \cdot \frac{U_{пр}}{U_{изм}} = 0{,}5 \cdot \frac{10}{3} = 2\%;$$

$$U_{изм} = 9 \text{ В}; \ \delta = K \cdot \frac{U_{пр}}{U_{изм}} = 0{,}5 \cdot \frac{10}{9} = 0{,}6\%.$$

Абсолютная погрешность однократных измерений напряжения $U_{изм}$ = 1; 3; 9 В:

$$\Delta U = \frac{K \cdot U_{пр}}{100} = \frac{0{,}5 \cdot 10}{100} = 0{,}05 \text{ В}.$$

Запишем результаты измерений напряжений $U_{изм}$ =1; 3; 9 В:

$U_{изм}$ = 1,0 ± 0,05 В или $U_{изм}$ = 1,0 В ± 5 %;
$U_{изм}$ = 3,0 ± 0,05 В или $U_{изм}$ = 3,0 В ± 2 %;
$U_{изм}$ = 9,0 ± 0,05 В или $U_{изм}$ = 9,0 В ± 0,6 %.

Задание:

№1. 1) Площадь океанов равна:
Тихого........................ ..179 679 тыс. кв км
Атлантического............93 363 » » »
Индийского ....74 917 » » »
Северного Ледовитого..13 100 » » »
Вычислить общую площадь этих океанов в миллионах квадратных километров, округлив данные в условии числа.
2) Округлить до тысяч следующие числа: 10 834 650; 4 354 160; 4 793 500; 6 381 480. Вычислить погрешность, допущенную при округлении.
3) Округлить до целых единиц следующие дробные числа: 228,7; 142,61; 374,4; 92,5; 93,5; $7\frac{2}{3}$; $4\frac{1}{5}$. Вычислить погрешность, допущенную при округлении.
4) Округлить до десятых долей следующие дробные числа: 12,39; 87,15; 279,68; 156,44; 60,52; 3,25; 1,408. Вычислить погрешность, допущенную при округлении.
№2. 1) Вычислить приближённые частные с точностью до целой единицы:
15139 : 25; 78,66 : 0,13; 78,66 : 0,013.
2) Вычислить приближённые частные с точностью до 0,1:
14 : 3; 5,4 : 1,7; 15,4 : 4.
3) Вычислить приближённые частные с точностью до 0,01 :
417 : 35; 17,51 : 6; 2,25 : 0,07; 39,5 :1,3.
№3. Сколько квадратных километров площади приходится на одного жителя каждой из указанных частей света, если:
в Азии на 43 883 тыс. кв. км площади приходится 1 535 000 тыс. человек,
в Африке на 30 284 тыс. кв. км площади приходится 224 000 тыс. человек,
в Европе на 10 498 тыс. кв. км площади приходится 569 000 тыс. человек.
Вычисления произвести с точностью до 0,01 кв. км.
№4. Древнегреческий учёный Архимед установил, что отношение длины окружности к её диаметру больше числа $3\frac{10}{71}$ и меньше $3\frac{1}{7}$. Вычислить значения этих дробей с точностью до 0,01.
№5. Выразить приближённо десятичной дробью число $5\frac{2}{7}$ с тремя верными цифрами. Вычислить абсолютную погрешность полученного приближённого значения.
№6. Сравним время на стенных и ручных часах. Пусть стенные часы показывают 2 часа 14 мин. (пополудни). Можно ли считать цифру 4 верной?
Пусть ручные часы в тот же момент показали 2 часа 13 мин. 15 сек. Можно ли считать цифру 5 верной? При решении задачи предполагается, что те и другие часы правильны.
№7. 1) На наружном термометре столбик подкрашенного спирта находится между 18 и 19 делениями выше нуля (рис. 41). Ученик записал показания термометра числом 18,5°. Назовите верные цифры, в этом числе. Как записать, что допущенная погрешность не превышает 0,5°?

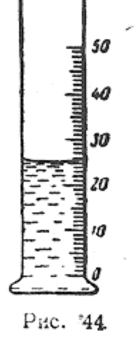


Рис. 44

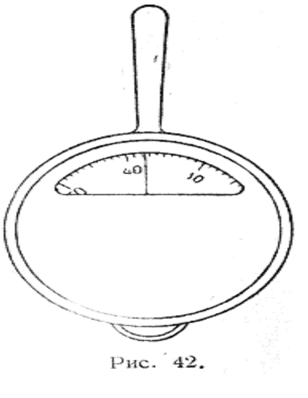


Рис. 42

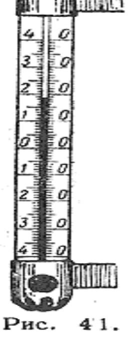


Рис. 41

2) На рисунке 42 изображена шкала курвиметра. При обведении части контура некоторой фигуры черта курвиметра оказалась между 37 и 38 делениями шкалы. Сколько сантиметров прошло колесо курвиметра, если каждое деление шкалы курвиметра соответствует 1 см длины? Ученик записал показание курвиметра 37,5 см. Назовите верные цифры в полученном

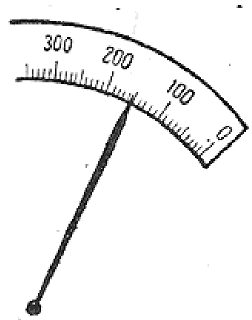


Рис. 43.

числе. Как записать, что допущенная погрешность не превышает 0,5 см?

№8. На весах взвешено 150 г конфет. Рассмотрите рисунок части шкалы весов (рис. 43). Какой наименьший и наибольший возможен вес данной покупки и какова наибольшая абсолютная погрешность при взвешивании на этих весах?

№9. 1) Ученик должен начертить план класса. Рулеткой он измерил длину $\boldsymbol{a}$ и ширину $\boldsymbol{b}$ и нашёл $\boldsymbol{a} \approx$ 8,50 м и $\boldsymbol{b} \approx$ 6,20 м. Назовите верные цифры в полученных числах. Как запирать, что возможная погрешность при измерении не превышает 5 см?

2) Измеряя мензуркой (рис. 44) объём жидкости, ученик получил 26 куб. см. Назовите в полученном числе верные цифры. Какую наибольшую погрешность мог допустить ученик при отсчёте на шкале мензурки?

№10. 1) Одна из старых русских мер длины—аршин (1 аршин $\approx$ 71,12 см) выражала приближённо длину шага взрослого человека. Если принять 1 аршин приближённо за 71 см, то какова получится абсолютная погрешность? (Значение 71,12 см при решении задачи примите за точное выражение аршина в метрических мерах.)

2) Одна из старых русских мер веса — пуд — приближённо равна 16,38 кг. Если принять, что 1 пуд $\approx$ 16,4 кг, то чему равна абсолютная погрешность? (Число 16,38 кг при решении задачи примите за точное выражение пуда в метрических мерах.)

Практическое занятие № 13

Выполнение операций над множествами

Цель: Научиться выполнять операции над множествами

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

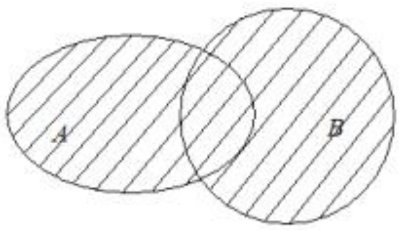
Операции над множествами

Основными операциями над множествами являются *объединение*, *пересечение*, *разность и дополнение*.

Определение 1. *Объединением* двух множеств называется новое множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (обозначается: $A \cup B$), т.е.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

На кругах Эйлера объединение множеств A и B изображается в виде заштрихованной области.



Например, пусть заданы три множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{5, 6\}$.

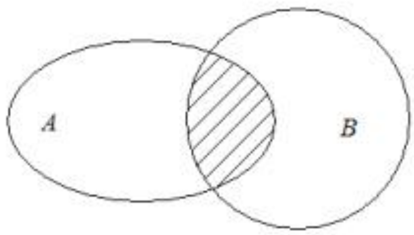
Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Определение 2. *Пересечением* двух множеств называется новое множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно обеим множествам (обозначается: $A \cap B$), т.е.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Например, для заданных множеств A, B и C: $A \cap B = \{1, 3\}$, $B \cap C = \{5\}$, $A \cap C = \varnothing$.

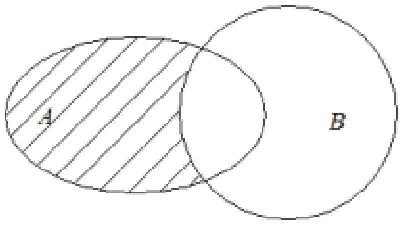
На кругах Эйлера пересечение множеств A и B изображается в виде заштрихованной области.



Определение 3. *Разностью* двух множеств A и B называется новое множество, элементы которого принадлежат A, но не принадлежат B (обозначают: $A \setminus B$), т.е.

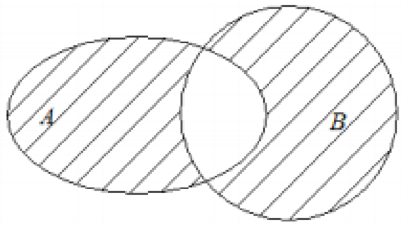
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

На кругах Эйлера разность множеств A и B изображается в виде заштрихованной области.



Например, для заданных множеств A, B и C: $A \setminus B = \{2, 4\}$, $B \setminus C = \{1, 3\}$, $A \setminus C = \{1, 2, 3, 4\} = A$.

Вопрос: каким операциям соответствует следующая диаграмма?



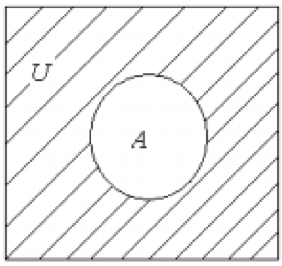
Ответ: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, операция называется симметричной разностью множеств. Причем $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cup A)$. Доказательство этого соотношения, как и любых других утверждений о равенстве множеств, состоит в том, чтобы предположив принадлежность некоторого элемента x множеству из левой части равенства, необходимо доказать, что этот же самый элемент принадлежит множеству, стоящему в правой части равенства и наоборот.

Задание: доказать равенство $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cup A)$.

Определение 4. Если A – подмножество множества U, то *дополнением* множества A до множества U есть множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов U, которые не принадлежат A, т.е.

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

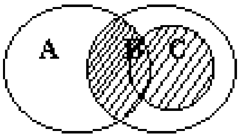
На кругах Эйлера дополнение изображается в виде заштрихованной области.

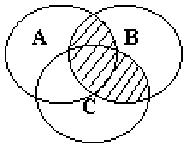


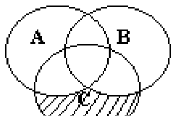
Задание:

Вариант 1

1. Приняв множество первых 33 натуральных чисел в качестве универсального множества U, запишите его и его подмножества: A – четных чисел; B – нечетных чисел; C – квадратов чисел; D – простых чисел; и запишите множества, которые получатся в результате следующих операций:
   $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $A\cap C$; 4) $A\cap D$; 5) C – A; 6) C – B; 7) C+D;
2. Дано универсальное множество $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h,k\}$ и его подмножества $A=\{a,b,c,f\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$, $C=\{h,k\}$. Найти: а) $\overline{A}\bigcup\overline{B}$; б) $A\bigcap\overline{B}$; в) $(B\setminus A)\bigcup\overline{C}$.
3. Представить множества диаграммами Эйлера–Венна
   а) $A\bigcup\left(B\bigcap\overline{C}\right)$;б) $(A\bigcap B)\bigcup(B\bigcap C)\bigcup(A\bigcap C)$;в) $A\setminus\overline{B\bigcup C}$.
4. Множества A, B, C представленные кругами Эйлера. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответственно заштрихованным областям:

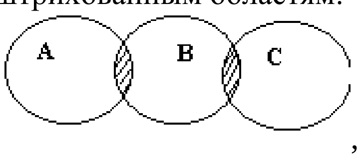


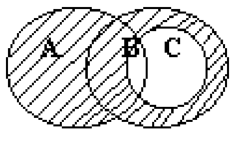
, b) 

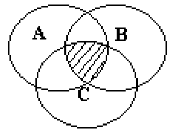
, c) 

Вариант 2

1. Приняв множество букв русского языка в качестве универсального множества U, запишите его и его подмножества: A – гласные буквы(10); B – согласные буквы(22); C – согласные звуки, имеющие пару(12); D – буквы не имеющие звука(2); и запишите множества, которые получатся в результате следующих операций:
   1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $B\cap C$; 4) $U\cap D$; 5) C – A; 6) B – C; 7) C+D;
2. Дано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и его подмножества $A=\{1,3,4\}$, $B=\{2,3,5,7\}$, $C=\{1,4,7,8,9\}$. Найти: а) $\overline{A}\bigcup\overline{B}$; б) $A\bigcap\overline{B}$; в) $(B\setminus A)\bigcup\overline{C}$.
3. Представить множества диаграммами Эйлера–Венна
   а) $A\bigcap(B\setminus C)$;б) $((A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B))\bigcap C$;в) $A+\overline{B\bigcap C}$.
4. Множества A, B, C представленные кругами Эйлера. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответственно заштрихованным областям:

а) 

, b) 

, c) 

Практическое занятие № 14

Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта, в формировании технологического цикла оказания услуг на транспорте

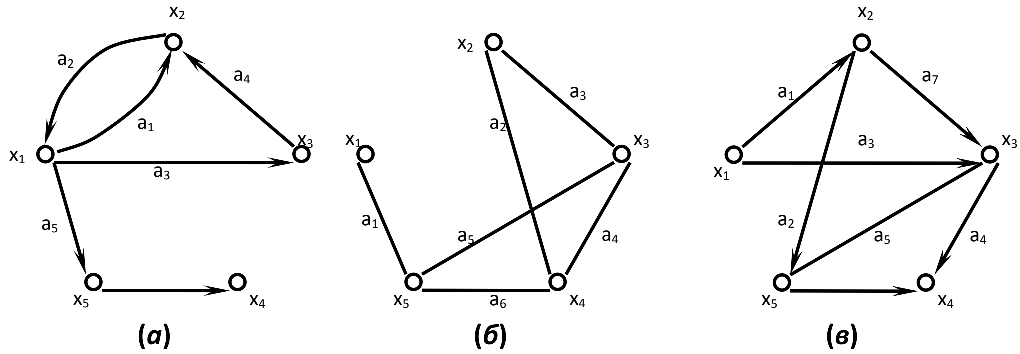
Цель: Научиться строить графы

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

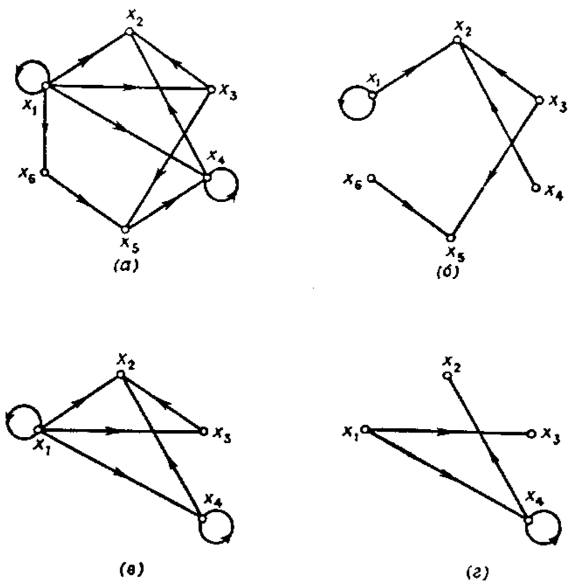
Краткие теоретические сведения

Граф G задается множеством точек или *вершин* $x_1, x_г, \ldots, x_n$ (которое обозначается через X) и множеством линий или *ребер* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (которое обозначается символом A), соединяющих между собой все или часть этих точек. Таким образом, граф G полностью задается (и обозначается) парой (X, A).

Если ребра из множества A ориентированы, что обычно показывается стрелкой, то они называются *дугами,* и граф с такими ребрами называется *ориентированным* графом. Если ребра не имеют ориентации, то граф называется *неориентированным*

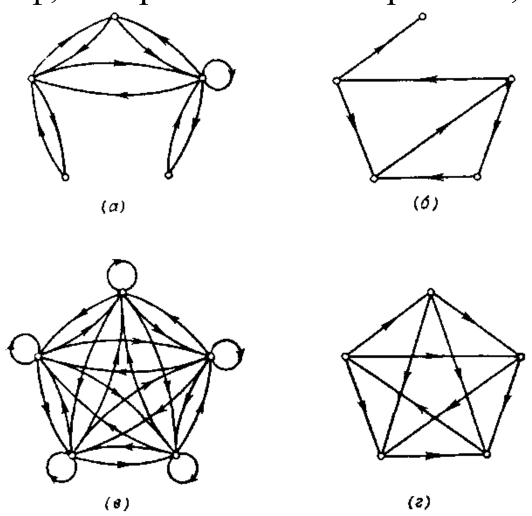


Пусть дан граф $G=(X, A)$. *Остовным подграфом* G_p графа G называется граф (X, A_p), для которого $A_p \subset A$. Таким образом, остовный подграф имеет то же самое множество вершин, что и граф G, но множество дуг подграфа G_p является подмножеством множества дуг исходного графа.



Типы графов

Граф $G=(X,A)$ называют *полным,* если для любой пары вершин x_i и x_j в Xсуществует ребро $\overline{(x_i,x_j)}$ в $\overline{G}=(X,\overline{A})$, т. е. для каждой пары вершин графа G должна существовать по крайней мере одна дуга, соединяющая их. Полный неориентированный граф, построенный на nвершинах, обозначается через K_n.



Пусть дан граф G, его *матрица смежности* обозначается через $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ и определяется следующим образом:

$a_{ij}=1$, если в Gсуществует дуга (x_i,x_j),

$a_{ij}=0$если в Gнет дуги (x_i,x_j).

Таким образом, матрица смежности графа, изображенного на рис. имеет вид

$$
A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right|
\end{array}
$$

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Например, сумма всех элементов строки x_i матрицы дает полустепень исхода вершины x_i, а сумма элементов столбца x_i— полустепень захода вершины x_i. Множество столбцов, имеющих 1 в строке x_i,. есть множество $\Gamma(x_i)$, а множество строк, которые имеют 1 столбце x_i, совпадает с множеством $\Gamma^{-1}(x_i)$.

Пусть дан граф *G*с *n*вершинами и *m* дугами. *Матрица инциденций*графа *G*обозначается через $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ и является матрицей размерности $n \times m$, определяемой следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_i,

$b_{ij} = -1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_i,

$b_{ij} = 0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_i или если a_j является петлей.

Для графа, приведенного на рис., матрица инциденций имеет вид

$$
B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_{91} & a_{10} \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right|
\end{array}
$$

Поскольку каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один – равный -1, либо все элементы столбца равны 0.

Если *G*является неориентированным графом, то его матрица инциденций определяется так же, как и выше, за исключением того, что все элементы, равные —1, заменяются на +1.

Задание:

<u>Вариант 1</u>

1. Представить в виде ориентированного графа отношение
ρ = (V, E), V = {2, 4, 16, 22}, E = {(x, y) : x / y – четно}.
2. Ориентированный граф G с множеством вершин V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} задан списком дуг
{(1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (5, 1), (5, 6), (5, 6), (5, 6), (7, 4), (7, 6)}.
Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.
3. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Неориентированный граф G задан вершинами {1,2,3,4,5,6,7} и рёбрами {(1,3); (1,4); (1,5); (1,7); (2,3); (2,4); (2,7);(3,5); (3,7); (4,6); (4,7); (5,6); (6,7)}. Построить реализацию графа, найти его остов.

<u>Вариант 2</u>

1. Представить в виде ориентированного графа отношение
ρ = (V, E),V = {2, 4, 16, 22}, E = {(x, y) : (x + y) / 6}.
2. Ориентированный граф G с множеством вершин V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} задан списком дуг
{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 5),(5, 7), (7, 1)}.
Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.
3. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Неориентированный граф с множеством вершин {1,2,3,4,5,6,7} и ребрами {(1,4), (1,6), (2,1), (2,2), (2,6),(3,2), (3,4), (3,6), (4,6),(5,2), (5,4), (5,5), (6,2), (6,5), (7,1), (7,6)}. Построить реализацию графа, найти его остов.

Практическое занятие № 15

Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.

Цель:Закрепить умения находить вероятность событий

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности, т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение.Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение.Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Исходя из этих общих понятий, можно дать определение вероятности.

Определение.Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

<u>Пример.</u> В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10}$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

<u>Определение.</u>Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Вообще говоря, классическое определение вероятности – довольно относительное. Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

К примеру, при проведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д.

Задание:

Вариант 1

1. В компании оказалось 10 девушек и 5 юношей. Найдите вероятность того, что на танец все юноши пригласят разных девушек.
2. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их на удачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Вариант 2

1. Берется наугад трехзначное число. Найдите вероятность того, что первая и последняя цифры этого числа совпадают.
2. Десять различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом.

Вариант 3

1. Устройство состоит их пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найдите вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
2. К экзамену выдается 25 вопросов. Студент подготовил 20 вопросов. В билете 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает 2 вопроса.

Вариант 4

1. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найдите вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
2. На корточках написаны числа от 1 до 10. Берутся подряд две карточки. Найти вероятность того, что число на первой карточке будет меньше числа на второй карточке.

Вариант 5

1. Из четырех одинаковых карточек, на которых написаны соответственно буквы А, Б, В, Г, наугад взяты две. Определите вероятность того, что буквы на этих карточках будут соседними по алфавиту.
2. В группе 30 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Вариант 6

1. В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102,,120 и произвольно расположенных. Перфораторщица наудачу извлекает две карты. Найдите вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.
2. В партии из 18 деталей находится 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

1 вариант	***2 вариант***	***3 вариант***	***4 вариант***	***5 вариант***	***6 вариант***
1, 12, 13	***2, 11, 14***	***3, 10, 15***	***4, 9, 13***	***5, 8, 15***	***6, 7, 15***

Задача 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.
Задача 2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.
Задача 3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
Задача 4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?
Задача 5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
Задача 6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.
Задача 7. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.
Задача 8. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?
Задача 9. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.
Задача 10. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".
Задача 11. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?
Задача 12. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.
Задача 13. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса?
Задача 14. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на карточках, равна десяти?
Задача 15. В урне лежат шары, двузначные номера которых составлены из цифр 1,2,3,4,5. Какова вероятность вынуть шар с номером 15?

Практическое занятие № 16

Решение задач на нахождение вероятности события при изучении и планировании рынка услуг на транспорте

Цель:Закрепить умение решать задачи на нахождение вероятности события

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Определение, основные формулы

Классическое определение вероятности

$$P(A) = m/n$$

(m - число благоприятных исходов опыта; n - число всех его исходов)

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B),$$

Задание:

Заполните пропуск (выбор единственного ответа):

1.	Если случайные события А и В не могут появиться вместе, то они называются… 1. Независимыми 2. Несовместными 3. Противоположными 4. Невозможными	4.	Если появление события В не изменяет вероятность события А, то события А и В называются… 1. Несовместными 2. Независимыми 3. Невозможными 4. Достоверными
2.	Случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное счетное множество значений, называется… 1. Непрерывной 2. Счетной 3. Дискретной 4. Бесконечной	5.	Функция $F(x) = P(X < x)$ называется 1. Вероятностью 2. Случайной функцией 3. Функцией распределения 4. Плотностью распределения
3.	Кривая, изображающая закон распределения для случайной переменной непрерывного типа, является графиком… 1. Вероятности 2. Плотности распределения 3. Функции распределения 4. Распределения	6.	Если вероятность P(A)=1, то событие называется… 1. Невозможным 2. Достоверным 3. Случайным 4. Независимым

Задание: Решить задачу (выбор одного верного ответа):

7.	Бросили игральную кость. Какова вероятность, что выпадет четное число очков Ответы: $а)0,5 \quad б)\frac{2}{3} \quad в)\frac{1}{3} \quad г)\frac{5}{6}$	10.	В группе 8 девушек и 6 юношей. Их разделили на две равные подгруппы. Сколько исходов благоприятствуют событию: 2 юноши окажутся в одной подгруппе, а 4 в другой? Ответы: а) 8 б) 168 в) 840 г) 56
8.	Монету подбросили 3 раза. Какова вероятность того, что “орел” выпадет 3 раза. Ответы: $а)\frac{3}{8} \quad б)\frac{1}{2} \quad в)\frac{7}{8} \quad г)\frac{1}{8}$	11.	Монету подбросили 3 раза. Какова вероятность того, что “орел” выпадет 1 раз. Ответы: $а)\frac{3}{8} \quad б)\frac{1}{2} \quad в)\frac{7}{8} \quad г)\frac{1}{8}$
9.	В группе 8 девушек и 6 юношей. Их разделили на две равные подгруппы. Сколько исходов благоприятствуют событию: 3 юноши окажутся в одной подгруппе, а 3 в другой? Ответы: а) 8 б) 168 в) 840 г) 56	12.	Монету подбросили 3 раза. Какова вероятность того, что “орел” выпадет хотя бы 1 раз. Ответы: $а)\frac{3}{8} \quad б)\frac{1}{2} \quad в)\frac{7}{8} \quad г)\frac{1}{8}$

Задание: Запишите формулу (выбор одного верного ответа):

13.	$P(\overline{A})=?$ Ответы: $а)0$ $б)1-P(A)$ $в)1$ $г)P(A)+P(B)-P(AB)$
14.	$P(A\overline{A})=?$ Ответы: $а)0$ $б)1-P(A)$ $в)1$ $г)P(A)+P(B)-P(AB)$
15.	$P(A+\overline{A})=?$ Ответы: $а)0$ $б)1-P(A)$ $в)1$ $г)P(A)+P(B)-P(AB)$
16.	Формула Байсса: $а)C_n^k p^k q^{n-k}=P_n(k)$ $б)P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\ldots+P(A_n)P_{A_n}(B)$ $в)\dfrac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P_{B_k}(A)}$ $г)P(A)\cdot P_A(B)$
17.	Формула Бернулли: $а)C_n^k p^k q^{n-k}=P_n(k)$ $б)P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\ldots+P(A_n)P_{A_n}(B)$ $в)\dfrac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P_{B_k}(A)}$ $г)P(A)\cdot P_A(B)$
18.	Формула полной вероятности: $а)C_n^k p^k q^{n-k}=P_n(k)$ $б)P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\ldots+P(A_n)P_{A_n}(B)$ $в)\dfrac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P_{B_k}(A)}$ $г)P(A)\cdot P_A(B)$

Задание: Вычислить (выбор одного верного ответа):

19.	Найти Р (АВ), если $P(A)=\dfrac{1}{3}$ $P_A(B)=\dfrac{2}{5}$ Ответы: $а)0,06$ $б)\dfrac{1}{6}$ $в)0,1$ $г)\dfrac{2}{15}$	22.	Найти $P(\overline{A})$, если Р(А) = 0,2 Ответы: а) 0,5 б) 0,8 в) 0,2 г) 0,6
20.	Найти Р (АВ), если $P(B)=\dfrac{1}{2}$ $P_B(A)=\dfrac{1}{3}$ Ответы: $а)0,06$ $б)\dfrac{1}{6}$ $в)0,1$ $г)\dfrac{2}{15}$	23.	Найти $P(\overline{A})$, если Р(А) = 0,8 Ответы: а) 0,5 б) 0,8 в) 0,2 г) 0,6
21.	Найти Р (АВ), если $P(A)=0,2$ $P_A(B)=0,5$ Ответы: $а)0,06$ $б)\dfrac{1}{6}$ $в)0,1$ $г)\dfrac{2}{15}$	24.	Найти $P(\overline{A})$, если Р(А) = 0,5 Ответы: а) 0,5 б) 0,8 в) 0,2 г) 0,6

Задание: Вычислить (выбор одного верного ответа):

25.	События А и В несовместимы. Найти Р(А + В), если Р(А) = 0,7 Р(В)= 0,1 Ответы:	28.	Найти Р (А+В), если Р(А)=0,5 Р(В)=0,2 Р(АВ)=0,1 Ответы:

	а) 0,9 б) 0,8 в) 0,7 г) 0,6		а) 0,5 б) 0,6 в) 0,9 г) 0,7
26.	События А и В несовместимы. Найти Р(А + В), если Р(А) = 0,25 Р(В)= 0,45 Ответы: а) 0,9 б) 0,8 в) 0,7 г) 0,6	29.	Найти Р (А+В), если Р(А)=0,2 Р(В)=0,8 Р(АВ)=0,1 Ответы: а) 0,5 б) 0,6 в) 0,9 г) 0,7
27.	События А и В несовместимы. Найти Р(А + В), если Р(А) = Р(В)= 0,3 Ответы: а) 0,9 б) 0,8 в) 0,7 г) 0,6	30.	Найти Р (А+В), если Р(А)=Р(В)=0,3 Р(АВ)=0,1 Ответы: а) 0,5 б) 0,6 в) 0,9 г) 0,7

Практическое занятие № 17

По заданному условию построить ряд распределения случайной величины согласно закону распределения дискретной случайной величины

Цель: Закрепить умение построения закона распределения случайной дискретной величины

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

1 Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

2 Дискретной случайной величиной (ДСВ) называют такую величину, множество значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.

3 Заданное соответствие между возможными значениями СВ и их вероятностями называется законом распределения случайной величины ; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

4 При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности. Эта таблица называется рядом распределения.

5 Ряд распределения можно представить графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения ДСВ, а по оси ординат - соответствующие вероятности. Соединив полученные точки отрезками, получим ломаную, называемую много- угольником распределения вероятностей

6 Функцией распределения случайной величины X (обозначается F(x)) назы-вается функция, определяемая соотношением F(x) = P(X < x).

7 Математическое ожидание ДСВ X равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е. $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$

8 Дисперсией ДСВ X (D(X)) называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания, т.е. $D(X)=M(X-M(X))^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 P(x_i)$

9 Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется арифметический корень из дисперсии, т.е. $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Пример выполнения:

Исходные данные:

Приживаемость саженцев яблонь составляет 80%. Наудачу выбирают 5 саженцев. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев, функцию распределения, построить многоугольник распределения и график функции распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа прижившихся саженцев.

Решение:

1 Вероятность приживаемости яблони равна 0,8.

X – случайная величина числа прижившихся яблонь из пяти саженцев:

Возможные значения: $x1 = 0$ – ни один саженец не прижился;

$x2 = 1$ – один саженец прижился;

$x3 = 2$ – два прижились;

$x4 = 3$ – три;

$x5 = 4$ – четыре;

$x6 = 5$ – пять саженцев прижились.

2 Вероятности этих значений вычислим по формуле Бернулли:

$$P(x_1) = C_5^0 p^0 q^5 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}(0{,}8)^0(0{,}2)^5 = 0{,}00032$$

$$P(x_2) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}(0{,}8)^1(0{,}2)^4 = 5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}0016 = 0{,}0064$$

$$P(x_3) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}(0{,}8)^2(0{,}2)^3 = 10\cdot 0{,}64\cdot 0{,}008 = 0{,}0512$$

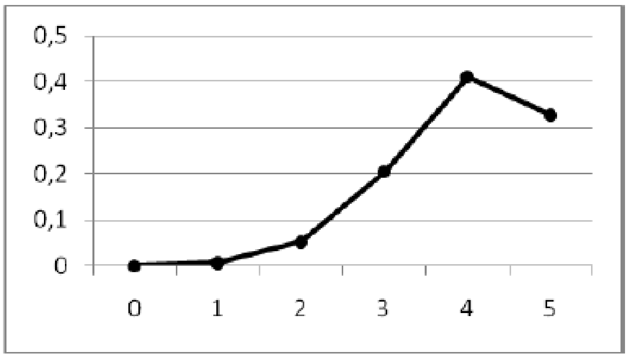
$$P(x_4) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}(0{,}8)^3(0{,}2)^2 = 10\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04 = 0{,}2048$$

$$P(x_5) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4!\cdot 1!}(0{,}8)^4(0{,}2)^1 = 5\cdot 0{,}4096\cdot 0{,}2 = 0{,}4096 \quad P(x_6) = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}(0{,}8)^5(0{,}2)^0 = 0{,}32768$$

Таким образом, закон распределения случайной величины:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Многоугольник распределения:



Вычислим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0; & \textit{если}\ x\le 0\\ 0{,}00032; & \textit{если}\ 0<x\le 1\\ 0{,}00032+0{,}0064=0{,}00672; & \textit{если}\ 1\le x<2\\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512=0{,}05792; & \textit{если}\ 2\le x<3\\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048=0{,}26272; & \textit{если}\ 3\le x<4\\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048+0{,}4096=0{,}67232; & \textit{если}\ 4\le x<5\\ 0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512+0{,}2048+0{,}4096+0{,}32768=1; & \textit{если}\ x\ge 5\end{cases}$$

Найдем числовые характеристики случайной величины, для этого составим таблицу:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768
X-M(X)	-4	-3	-2	-1	0	1
$(X\text{-}M(X))^2$	16	9	4	1	0	1

Мат. ожидание: $$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_iP(x_i)=$$
$$=1\cdot 0{,}0064+2\cdot 0{,}0512+3\cdot 0{,}2048+4\cdot 0{,}4096+5\cdot 0{,}32768=4$$

Дисперсия: $$D(X)=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^2P(x_i)=$$
$$=16\cdot 0.00032+9\cdot 0{,}0064+4\cdot 0{,}0512+1\cdot 0{,}2048+0\cdot 0{,}4096+1\cdot 0{,}32768=0{,}8$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}89$

Задания:

1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

3. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелок делает выстрелы до первого промаха. Составить закон распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку, если всего имеется пять патронов. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

4. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа гербов при четырех подбрасываниях монеты. Построить полигон полученного распределения.

5. Два носка выбираются случайным образом из ящика, в котором находится 5 коричневых и 3 зеленых. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа коричневых носков. Построить полигон полученного распределения.

6. В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных однотипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

7. В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных однотипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества кондиционных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

8. В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества дефектных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

9. В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества качественных деталей среди трѐх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

10. В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

11. В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар имеется в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

12. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых белых шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее

квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

13. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

14. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

15. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

16. Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

17. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества качественных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

18. Дискретная случайная величина – число мальчиков в семьях с 5 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества мальчиков. Построить полигон полученного распределения.

19. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

20. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго – 0,4. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

21. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

22. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу не красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

23. Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Построить полигон полученного распределения.

24. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

25. В коробке имеются 10 карандашей, из которых 4 синие. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу синих карандашей. Построить полигон полученного распределения.

26. Дискретная случайная величина – число девочек в семьях с 4 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества девочек. Построить полигон полученного распределения.

27. 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,6, для второго – 0,7. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

28. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,8 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

29 Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

30 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попада-ний мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

31 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попада-ний мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,7. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

<u>Практическое занятие № 18</u>

Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности

Цель:Научиться применять формулы прямоугольников, трапеций и парабол при вычислении площади криволинейной трапеции

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Метод прямоугольников

Одним из простейших методов численного интегрирования является **метод прямоугольников**. На частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ подынтегральную функцию заменяют полиномом Лагранжа нулевого порядка, построенным в одной точке. В качестве этой точки можно выбрать середину частичного отрезка $x_{j-0.5} = x_j - 0.5h$. Тогда значение интеграла на частичном отрезке: $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cdot dx \approx f(x_{j-0.5})\cdot h$ Подставив это выражениеполучим составную формулу **средних прямоугольников**:

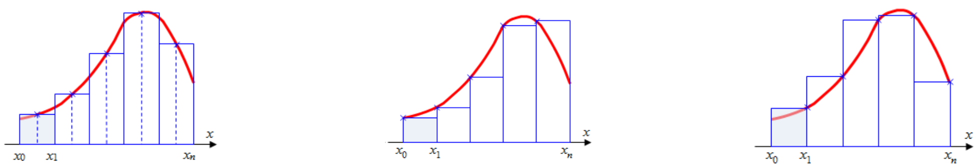
$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} f(x_{j-0.5})\cdot h$$

Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рис.(а). Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из N прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы N элементарных прямоугольников.

Формулу (2.7) можно представить в ином виде:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} h\cdot f(x_{j-1})$$ или $$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} h\cdot f(x_j)$$

Эти формулы называются формулой **левых и правых прямоугольников** соответственно. Графически метод левых и правых прямоугольников представлен на рис (б, в). Однако из-за нарушения симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, их погрешность значительно больше, чем в методе средних прямоугольников.



а) средние прямоугольники *б) левые прямоугольники* *в) правые прямоугольники*

Рис. Интегрирование методом прямоугольников

Метод трапеций

Если на частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ подынтегральную функцию заменить полиномом Лагранжа первой степени:

$$f(x) = L_{1,j}(x) = \frac{1}{h}\left[\left(x - x_{j-1}\right)f(x_j) - \left(x - x_j\right)f(x_{j-1})\right]$$ то искомый интеграл на частичном отрезке запишется следующим образом:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{1}{h}\left[f(x_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x - x_{j-1}\right)dx - f(x_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x - x_j\right)dx\right] = \frac{f\left(x_{j-1}\right) + f\left(x_j\right)}{2}h$$

Тогда составная формула трапеций на всем отрезке интегрирования $[a,b]$ примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N}\frac{f\left(x_j\right) + f\left(x_{j-1}\right)}{2}h = h\left[\frac{1}{2}\left(f_1 + f_N\right) + f_2 + \ldots + f_{N-1}\right]$$ Графически метод трапеций представлен на рис. Площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из *N*трапеций, при этом кривая заменяется вписанной в нее ломаной. На каждом из частичных отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные значения, при этом площадь трапеции на каждом отрезке определяется по формуле

Погрешность метода трапеций выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удается далеко не всегда.

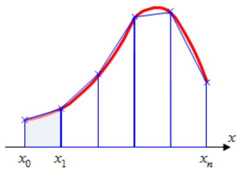


Рис. Интегрирование методом трапеций

Метод Симпсона

В этом методе подынтегральная функция на частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ аппроксимируется параболой, проходящей через три точки x_{j-1}, $x_{j-0.5}$, x_j, то есть интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени:

$$f(x) = L_{2,j}(x) = \frac{2}{h^2}\left[\left(x - x_{j-0.5}\right)\left(x - x_j\right)f(x_{j-1}) - \right.$$
$$\left. - 2\cdot\left(x - x_{j-1}\right)\left(x - x_j\right)f(x_{j-0.5}) + \left(x - x_{j-1}\right)\left(x - x_{j-0.5}\right)f(x_j)\right]$$ Проведя интегрирование, получим:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f_{j-1} + 4f_{j-0.5} + f_j\right)$$

Это и есть формула Симпсона или формула парабол. На отрезке $[a,b]$ формула Симпсона примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[f_0 + f_N + 2\left(f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-1}\right) + 4\left(f_{0.5} + f_{1.5} + f_{2.5} + \ldots + f_{N-0.5}\right)\right] =$$

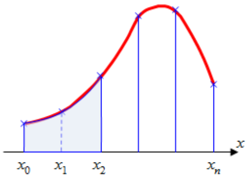
$$= \frac{h}{6}\left[f_0 + f_N + 2\cdot\sum_{j=1}^{N-1} f_j + 4\cdot\sum_{j=0.5}^{N-0.5} f_j\right]$$

Если разбить отрезок интегрирования $[a,b]$ на **четное** количество $2N$ равных частей с шагом $h = \dfrac{b-a}{2N}$, то можно построить параболу на каждом сдвоенном частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ и переписать выражения без дробных индексов. Тогда формула Симпсона примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + f_5 + ..$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2N} + 2 \cdot \sum_{j=2,2}^{2N-2} f_j + 4 \cdot \sum_{j=1,2}^{2N-1} f_j\right]$$

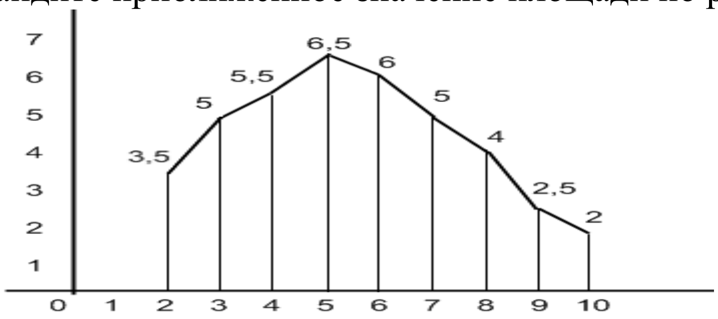
Графическое представление метода Симпсона показано на рис. На каждом из сдвоенных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой параболой. *Рис. Метод Симпсона*



Задание:

1 вариант

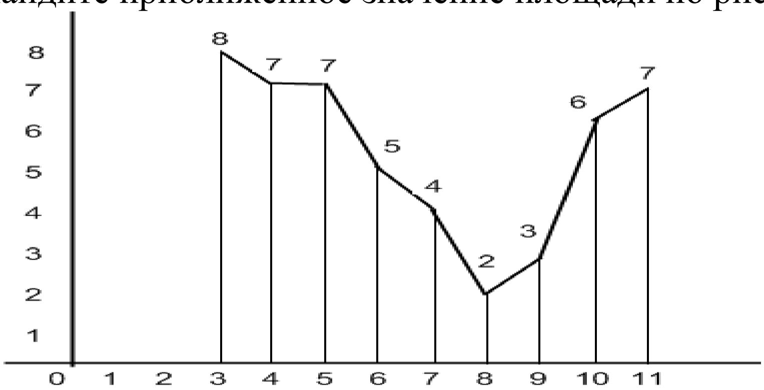
1. Найдите приближённое значение площади по рисунку:



2. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_{1}^{7} x^5 dx$, разбив его на 6 частей.
3. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_{1}^{2.2} \frac{dx}{1+x^2}$, разбив его на 6 частей.

2 вариант

1. Найдите приближённое значение площади по рисунку:



2. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_{1}^{9} x^2 dx$, разбив его на 8 частей.
3. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_{1}^{5} \frac{2dx}{\sqrt{x}}$, разбив его на 4 части.

Практическое занятие № 19

Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при $n = 2$), функции, заданной аналитически. Исследование свойств этой функции для определения эффективности планирования технического цикла эксплуатации электроснабжения на железнодорожном транспорте

Цель: Научиться решать задачи на нахождение по таблично заданной функции.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции f(x) по заданным в конечном числе точек значениям этой функции.

Один из универсальных способов построения формул численного дифференцирования состоит в том, что по значениям функции f(x) в некоторых узлах $x_0, x_1, \dots, x_N$ строят интерполяционный полином $P_N(x)$ (обычно в форме Лагранжа) и приближенно полагают $f^{(r)}(x) \approx P^{(r)}N(x)$, $0 \le r \le N$

В ряде случаев наряду с приближенным равенством удается (например, используя формулу Тейлора) получить точное равенство, содержащее остаточный член R (погрешность численного дифференцирования):

$f^{(r)}(x) = P^{(r)}_N(x) + R,\ 0 \le r \le N$

Такие формулы называются формулами численного дифференцирования с остаточными членами. Степень, с которой входит величина $h = \max_i h_i$ ($h_i = x_i - x_{i-1}$) в остаточный член, называется порядком погрешности формулы численного дифференцирования. Формулы с отброшенными остаточными членами называются просто формулами численного дифференцирования.

Формулы численного дифференцирования с остаточными членами для первой (r=1) и второй (r=2) производных в узлах, расположенных с постоянным шагом $h_i \equiv h > 0$:

r=1, N=1 (два узла): $f'(x_0) = (f_1 - f_0)/h - hf''(\xi)/2$

$f'(x_1) = (f_1 - f_0)/h + hf''(\xi)/2$

r=1, N=2 (триузла): $f'(x_0) = (-3f_0 + 4f_1 - f_2)/2h + h^2 f'''(\xi)/3$

$f'(x_1) = (f_2 - f_0)/2h - h^2 f'''(\xi)/6$

$f'(x_2) = (f_0 - 4f_1 + 3f_2)/2h + h^2 f'''(\xi)/3$

r=2, N=2 (триузла): $f''(x_0) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h_2 - hf'''(\xi)$

$f''(x_1) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 - h^2 f^{(4)}(\xi)/12$

$f''(x_2) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 + hf'''(\xi)$

r=2, N=3 (четыреузла): $f''(x_0) = (2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3)/h^2 + 11h^2 f^{(4)}(\xi)/12$
$f''(x_1) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 - h^2 f^{(4)}(\xi)/12$
$f''(x_2) = (f_0 - 2f_1 + f_3)/h^2 - h^2 f^{(4)}(\xi)/12$
$f''(x_3) = (-f_0 + 4f_1 - 5f_2 + 2f_3)/h^2 + 11h^2 f^{(4)}(\xi)/12$
В приведенных формулах ξ есть некоторая точка (своя для каждой из формул) из интервала (x_0, x_N). Остаточные члены этих формул находятся с помощью формулы Тейлора. При этом предполагается, что на отрезке $[x_0, x_N]$ у функции f(x) непрерывна производная, через которую выражается остаточный член. При четном N в среднем узле для четной производной порядок точности формулы на единицу больше, чем в остальных узлах. Поэтому рекомендуется по возможности использовать формулы численного дифференцирования с узлами, расположенными симметрично относительно той точки, в которой ищется производная.

Задание: Составить таблицу конечных разностей функций, заданных аналитически, от начального значения x_0до конечного x_7, приняв шаг равным h:

1.	1. $y = x^3 - x^2 + 6x - 8,\ x_0 = 0\ \ h = 1$	**4.**	$y = 2x^3 - 8x + 20,\quad x_0 = 0,5\ \ h = 0,5$
2.	1. $y = 5x^3 - 8x + 4,\quad x_0 = 0\ \ h = 2$	**5.**	$y = x^4 - 2x^2 + 1,\quad x_0 = 0\quad h = 0,5$
3.	1. $y = x^4 - 2x^2 + 10,\quad x_0 = 0\ \ h = 0,2$	**6.**	$y = 0,5x^3 + 2x^2 - 3x + 8,\ x_0 = 1\ h = 1$

Задание: Построить таблицу разностей функции $y = f(x)$, заданной таблично:

7.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7,5	2	-3,5	-6	-2,5	10	34,5

8.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-3,9	-0,2	6,7	17,4	32,5	52,6	78,3

9.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-3,9	-5,2	-3,3	2,4	12,5	27,6	48,3

10.

x	1	2		4	5	6	7
y	6	16	36	72	130	216	336

11.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-3	-6	-3	12	45	102	189

12.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	8	30	72	140	240	378

Задание: Найти значения первой и второй производных функции, заданной таблично, в точках *x=a+bn*:

13. ***x=2,4+0,05n***

x	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
y(x)	3,526	3,782	3,945	4,043	4,104	4,155

n=1

14. ***x=4,5-0,06n***

x	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6
y(x)	4,222	4,331	4,507	4,775	5,159	5,683

n=5

15. ***x=1,6+0,08n***

x	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y(x)	10,517	10,193	9,807	8,387	8,977	8,637

n=2

16. *x=2,4+0,05n*

x	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
y(x)	3,526	3,782	3,945	4,043	4,104	4,155

n=3

17. *x=4,5-0,06n*

x	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6
y(x)	4,222	4,331	4,507	4,775	5,159	5,683

n=7

18. *x=1,6+0,08n*

x	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y(x)	10,517	10,193	9,807	8,387	8,977	8,637

n=4

Задание: По табличным данным найти аналитическое выражение первой производной:

19.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	6	10	26	60	118	206	330	496

20.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-2	15	58	139	270	463	730	1083	1534

21.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-1,5	16	70,5	180	362,5	636	1018,5	1528	2182,5

22.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5,5	18	40,5	76	127,5	198	290,5	408	553,5

23.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	7	24	63	136	255	432	679	1008	1431

24.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	18	78	204	420	750	1218	1848	2664

Задание: Вычислить значения первой и второй производной функции в точке x_0, методом численного дифференцирования. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой:

25.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	6	10	26	60	118	206	330	496

x_0=1,5

26.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-2	15	58	139	270	463	730	1083	1534

x_0=2,5

27.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-1,5	16	70,5	180	362,5	636	1018,5	1528	2182,5

x_0=1,25

28.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5,5	18	40,5	76	127,5	198	290,5	408	553,5

x_0=1,75

29.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	7	24	63	136	255	432	679	1008	1431

x_0=2,2

30.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	18	78	204	420	750	1218	1848	2664

x_0=2,1

Практическое занятие № 20

Определение количества электроэнергии, затраченной на тягу поездов, в зависимости от плана и профиля пути с использованием метода Эйлера, решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель: Закрепить и систематизировать знания по теме «Основные численные методы».

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Форма выполнения задания: кроссворд.

Пояснения к работе:

Методические рекомендации по составлению кроссвордов

В процессе работы необходимо:

- просмотреть и изучить необходимый материал, как в лекциях, так и в дополнительных источниках информации;
- составить список слов раздельно по направлениям;
- составить вопросы к отобранным словам;
- проверить орфографию текста, соответствие нумерации;
- оформить готовый кроссворд.

Общие требования при составлении кроссвордов:

- Не допускается наличие "плашек" (незаполненных клеток) в сетке кроссворда;
- Не допускаются случайные буквосочетания и пересечения;
- Загаданные слова должны быть именами существительными в именительном падеже единственного числа;
- Двухбуквенные слова должны иметь два пересечения;
- Трехбуквенные слова должны иметь не менее двух пересечений;
- Не допускаются аббревиатуры (ЗиЛ и т.д.), сокращения (детдом и др.);
- Не рекомендуется большое количество двухбуквенных слов;
- Все тексты должны быть написаны разборчиво, желательно отпечатаны.

Требования к оформлению:

На каждом листе должна быть фамилия автора, а также название данного кроссворда;

Рисунок кроссворда должен быть четким;

Сетки всех кроссвордов должны быть выполнены в двух экземплярах:

1-й экз. - с заполненными словами;

2-й экз. - только с цифрами позиций.

Ответы публикуются отдельно. Ответы предназначены для проверки правильности решения кроссворда и дают возможность ознакомиться с правильными ответами на нерешенные позиции условий, что способствует решению одной из основных задач разгадывания кроссвордов — повышению эрудиции и увеличению словарного запаса.

Критерии оценивания составленных кроссвордов:

Четкость изложения материала, полнота исследования темы;

Оригинальность составления кроссворда;

Практическая значимость работы;

Уровень стилевого изложения материала, отсутствие стилистических ошибок;

Уровень оформления работы, наличие или отсутствие грамматических и пунктуационных ошибок;

Количество вопросов в кроссворде, правильное их изложения.

Перечень рекомендуемой учебной литературы, информационных ресурсов сети Интернет соответствует пункту 3.2. рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01. Математика специальности 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям)