ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Петрозаводский филиал ПГУПС

ОДОБРЕНО	УТВЕРЖДАЮ
на заседании цикловой комиссии ЕН	Начальник УМО
протокол № 8 от 28 апреля 2017 г.	
Председатель цикловой комиссии:	______ А.В. Калько
Масайлова Т.А (______)	«28» 04 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению практических занятий

По учебной дисциплине: ЕН.01. Математика

Специальность: 23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог

Разработчик: Писаренко А.С.

2017 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации и проведению практических занятий разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01. Математика и предназначено для выполнения практических занятий обучающимися.

Практические занятия по учебной дисциплине направлены на усвоение знаний, освоение умений и формирование элементов общих и профессиональных компетенций, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

уметь:

использовать методы линейной алгебры;

решать основные прикладные задачи численными методами;

знать:

основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;

В результате освоения учебной дисциплины происходит поэтапное формирование элементов общих и профессиональных компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 2.2. Планировать и организовывать мероприятия по соблюдению норм безопасных условий труда.

ПК 2.3. Контролировать и оценивать качество выполняемых работ.

ПК 3.1. Оформлять техническую и технологическую документацию.

ПК 3.2. Разрабатывать технологические процессы на ремонт отдельных деталей и узлов подвижного состава железных дорог в соответствии с нормативной документацией.

Рабочей программой предусмотрено выполнение обучающимися практических занятий, включая, как обязательный компонент практические задания с использованием персонального компьютера.

Распределение результатов освоения учебного материала в ходе выполнения заданий на практических занятиях происходит в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Распределение результатов освоения учебного материала

Раздел, тема	**Контрольно-оценочные мероприятия**	**Результаты**		**Поэтапно формируемые элементы общих и профессиональных компетенций**
		усвоенные знания	**освоенные умения**	
Раздел 1. Линейная алгебра				
Тема 1.1 Основы линейной алгебры	**Практическое занятие 1** Комплексные числа и действия над ними. Решение задач для полного сопротивления электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел	Основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики	Использовать методы линейно алгебры	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 8. ПК 2.3. ПК 3.1.
Раздел 2. Основы дискретной математики				
Тема 2.1. Основы теории множеств и теории графов	**Практическое занятие 2** Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта; в формировании технологического цикла эксплуатации машин и оборудования на железнодорожном транспорте.	Основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики	Использовать методы линейно алгебры	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 5. ОК 8. ОК 9. ПК 2.2. ПК 2.3. ПК 3.1.
Раздел 3. Основы математического анализа				
Тема 3.1. Дифференциальное и интегральное исчисление	**Практическое занятие 3** Нахождение производных функций, нахождение неопределенных и вычисление определенных интегралов, вычисление	Основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического	Использовать методы линейно алгебры	ОК 2. ОК 3. ОК 5. ОК 8. ОК 9. ПК 2.2.

	площади плоской фигуры и объема тела вращения	анализа, теории вероятностей и математической статистики		ПК 2.3. ПК 3.1.
Тема 3.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения	**Практическое занятие 4** Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Применение обыкновенных дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач.	Основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики	Использовать методы линейно алгебры	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 4. ОК 8. ПК 2.3. ПК 3.1.
Тема 3.4. Ряды	**Практическое занятие 5** Оценка результатов эффективности работы механизмов и оборудования подвижного состава на железнодорожном транспорте посредствам определения сходимости числового ряда по признаку Даламбера.	Основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики	Использовать методы линейно алгебры	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 8. ОК 9. ПК 2.3. ПК 3.1.
Раздел 4. Основы теории вероятностей и математической статистики				
Тема 4.1. Основы теории вероятностей и математической статистики	**Практические занятия 6** Решение задач на нахождение вероятности события при изучении и планировании технологического цикла эксплуатации машин и оборудования на железнодорожном транспорте	Основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики	Использовать методы линейно алгебры	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 5. ОК 6. ОК 7. ОК 8. ОК 9. ПК 2.2. ПК 2.3. ПК 3.1. ПК 3.2.
Раздел 5. Основные численные методы				
Тема 5.1. Численное интегрирование	**Практическое занятие 7** Вычисление определенных интегралов с использованием численных методов	Основные численные методы решения прикладных задач	Решать основные прикладные задачи численными методами	ОК 2. ОК 3. ОК 8. ПК 2.3. ПК 3.1.
Тема 5.2. Численное дифференцирование	**Практическое занятие 8** Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при n=2), функции, заданной аналитически. Исследование свойств этой функции для определения эффективности планирования технологического цикла эксплуатации подвижного состава на железнодорожном транспорте.	Основные численные методы решения прикладных задач	Решать основные прикладные задачи численными методами	ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 4. ОК 8. ПК 2.3. ПК 3.1.

Содержание практических занятий охватывает весь круг умений и компетенций, на формирование которых направлена учебная дисциплина.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1

Комплексные числа и действия над ними. Решение задач для полного сопротивления электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел

Практическое занятие №2

Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта; в формировании технологического цикла эксплуатации машин и оборудования на железнодорожном транспорте.

Практическое занятие №3

Нахождение производных функций, нахождение неопределенных и вычисление определенных интегралов, вычисление площади плоской фигуры и объема тела вращения

Практическое занятие №4

Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Применение обыкновенных дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач.

Практическое занятие №5

Оценка результатов эффективности работы механизмов и оборудования подвижного состава на железнодорожном транспорте посредствам определения сходимости числового ряда по признаку Даламбера.

Практические занятия №6

Решение задач на нахождение вероятности события при изучении и планировании технологического цикла эксплуатации машин и оборудования на железнодорожном транспорте

Практическое занятие №7

Вычисление определенных интегралов с использованием численных методов

Практическое занятие №8

Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при n=2), функции, заданной аналитически. Исследование свойств этой функции для определения эффективности планирования технологического цикла эксплуатации подвижного состава на железнодорожном транспорте.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

При оценке освоенных умений при выполнении практических работ применяется пятибалльная шкала оценивания.

Оценивание практических занятий производится в соответствии со следующими нормативными актами:

- Положение о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;
- Положение о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий.

Практическое занятие №1

Комплексные числа и действия над ними. Решение задач для полного сопротивления электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами в различных формах записи.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

1.1. Алгебраическая форма комплексных чисел

Комплексными числами называются выражения вида $a+bi$, (где a и bдействительные числа, а i - символ, удовлетворяющий условию $i^2=-1$).Для комплексных чисел равенство, сложение и умножение определяются следующим образом:

а) суммой двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ (1.1),

в) произведением двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число

$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ (1.2).

Пример. 1.1. Вычислить сумму и произведение двух комплексных чисел: $z_1=2+3i;\ z_2=4-2i$

Решение.

$z_1+z_2=(2+4)+(3-2)i=6+i;$

$z_1\cdot z_2=(2+3i)\cdot(4-2i)=2\cdot4-2\cdot2\cdot i+3\cdot4\cdot i-3\cdot2\cdot i\cdot i=8-4i+12i+6=14+8i$

Разность **двух комплексных чисел** – операция обратная сложению и может быть выполнена по формуле: $(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$ (1.3).

Пример 1.2. Вычислить разность двух комплексных чисел: $z_1=-4+2i;\ z_2=3-i$

Решение $z_1-z_2=(-4-3)+(2-(-1))i;=-7+3i$

Число $\bar{z}=a-bi$ называется ***комплексно-сопряженным с комплексным числом*** $z=a+bi$. Понятие комплексной сопряженности взаимно.

Для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое, надо записать их в виде дроби, в числителе которой – делимое, а в знаменателе – делитель, а затем числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное со знаменателем.

Пример 1.3. Вычислить частное от деления комплексного числа $z_1 = 14 + 8i$ на комплексное число $z_2 = 4 - 2i$

Решение $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(14+8i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{56+28i+32i-16}{4^2+2^2} = \dfrac{40+60i}{20} = 2+3i$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда $a = b = 0$.

Операция возведения в степень комплексного числа рассматривается как частный случай произведения одного и того же сомножителя.

Степени мнимой единицы даются формулой

$$i^n = \begin{cases} i, & \textit{если } n = 4k+1, \\ -1, & \textit{если } n = 4k+2, \\ -i, & \textit{если } n = 4k+3, \\ 1, & \textit{если } n = 4k+4 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Например, $i^{47} = i^{4 \cdot 11 + 3} = i^{-3} = -i$

1.3. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Всякое комплексное число z может быть представлено в ***тригонометрической*** *форме* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Число r является *модулем,* а угол φ - *аргументом* комплексного числа z.

Если $z = a + bi$, то $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$; $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$. (1.6).

При определении угла φ следует использовать формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = arctg\left|b/a\right|, \quad \textit{если } a>0, b>0, \\ &\varphi = \pi - arctg\left|b/a\right|, \quad \textit{сли } a<0, b>0, \\ &\varphi = \pi + arctg\left|b/a\right|, \quad \textit{если } a<0, b<0, \\ &\varphi = 2\pi - arctg\left|b/a\right|, \quad \textit{если } a>0, b<0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Модуль комплексного числа z обозначается еще $|z|$, а аргумент – $arg z$.

Комплексные числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ (заданные в тригонометрической форме) ***умножаются*** и ***делятся*** соответственно по формулам

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \qquad (1.8)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (1.9)$$

Возведение комплексного числа в целую положительную степень осуществляется по формуле:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.10).$$

Равенство $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. называется ***формулой Муавра.***

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ r > 0$, дает nразличных значений, которые можно найти по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad (1.11)$$

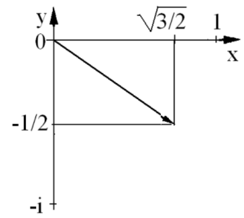
где $r \geq 0,\ k = 1,2,\dots,n-1$.

В частности, $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 1,2,\dots,n-1$.

На комплексной плоскости эти точки находятся в вершинах правильного многоугольника, с центром в точке (0; 0), одна из вершин этого многоугольника находится в точке (1; 0).

Пример 1.6.Записать комплексное число $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ в тригонометрической форме.

Решение. Построим данное число на комплексной плоскости (см. рис.).



Модуль (радиус-вектор) комплексного числа:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

Его аргумент (угол наклона радиус-вектора к оси x)равен:

$$\cos\varphi = \frac{a}{|r|} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

Знак «минус» обусловлен тем, что конец радиус-вектора находится в четвертой четверти комплексной плоскости.

В тригонометрической форме комплексное число записывается в виде: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Следовательно, заданное число запишется в виде: $z = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)$.

Пример 1.7. Даны два комплексных числа в тригонометрической форме: $Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right);\quad Z_2 = 3\left(cos\frac{6}{7}\pi + i\sin\frac{6}{7}\pi\right)$. Записать их произведение и частное от деления первого числа на второе.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{6}{7}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{6}{7}\pi\right)\right) = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\frac{z_1}{z_2}\cdot = \frac{2}{3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{7} - \frac{6}{7}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{6}{7}\pi\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{5}{7}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{7}\pi\right)\right)$$

Пример 1.8. Дано комплексное число в алгебраической форме: $z = 2 - 2i$

а) перевести его в тригонометрическую форму;

б) возвести в четвертую степень;

в) извлечь корень третьей степени.

Решение.

$r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $\cos\varphi=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\pi}{4}$; $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

$$z^4=\left(2\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\frac{7\pi\cdot 4}{4}+i\sin\frac{7\pi\cdot 4}{4}\right)=32(\cos 7\pi+i\sin 7\pi);$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right);\ k=1;2$$

1.4. Показательная форма комплексных чисел

Комплексное число z может быть представлено и в ***показательной форме:*** $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{\varphi i}$.

В частности: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi,$

$$e^{2\pi i}=1,\ e^{\pi i}=-1,\ e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\ e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i.$$

Для показательной формы чисел справедливы *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}),\ \sin\varphi=\frac{1}{2}(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})$$

В **показательной форме** комплексные числа **умножаются, делятся и возводятся в степень** соответственно по формулам

$$e^{\varphi_1 i}\cdot e^{\varphi_2 i}=e^{(\varphi_1+\varphi_2)i},\quad \frac{e^{\varphi_1 i}}{e^{\varphi_2 i}}=e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}\quad (e^{\varphi i})^n=e^{\varphi n i}.$$

Пример 1.9. Записать комплексное число $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ в показательной форме.

Решение. Модуль (радиус-вектор) комплексного числа:

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

Его аргумент равен: $\cos\varphi=\frac{a}{|r|}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \varphi=-\frac{\pi}{6}$. Знак «минус» обусловлен тем, что конец радиус-вектора находится в четвертой четверти комплексной плоскости.

В показательной форме комплексное число записывается в виде $z=re^{i\varphi}$, поэтому в нашем случае $z=e^{-\frac{\pi}{6}i}$

Пример 1.10. Даны два комплексных числа: $z_1=3e^{i\pi};\quad z_2=1{,}5e^{i\frac{\pi}{2}}$. Найти

а) $z_1\cdot z_2$; *б)* $\frac{z_1}{z_2}$

Решение *а)* $z_1\cdot z_2=3\cdot 1{,}5e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=4{,}5e^{i\frac{3\pi}{2}}$;*б)* $\frac{z_1}{z_2}=(3:2)e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=2^{i\frac{\pi}{2}}$

Задания:

Вариант 1	**1, 10, 11, 16, 21**
Вариант 2	**2, 9, 12, 17, 22**
Вариант 3	**3, 8, 13, 18, 23**
Вариант 4	**4, 7, 14, 19, 24**
Вариант 5	**5, 6, 15, 20, 25**

Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной формах:

1. $\frac{1+i}{1-2i}-(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i)$.

2. $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$.

3. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17}$.

4. $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12}$.

5. $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3})$

6. $\frac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i)$

7. $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$

8. $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$

9. $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5}$

10. $\frac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13})$.

Выполните действия в тригонометрической форме. Результат запишите в показательной и алгебраической формах:

11. $4(\cos 220°+i\sin 220°)\cdot 1{,}5(\cos 20°+i\sin 20°)$.

12. $3(\cos 280°+i\sin 280°):\frac{3}{4}(\cos 70°+i\sin 70°)$.

13. $(2(\cos 50°+i\sin 50°))^6$.

14. $\sqrt[3]{-8}$.

15. $3(\cos 340°+i\sin 340°):\frac{3}{8}(\cos 25°+i\sin 25°)$.

16. $\sqrt[4]{16}$.

Запишите комплексное число в тригонометрической и алгебраической формах:

17. $2e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

18. $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

19. $2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

20. $3{,}2e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

21. $1{,}6e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

22. $6e^{\frac{7\pi}{4}i}$

23. $8e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

24. $6e^{2\pi i}$

25. $4e^{\frac{11\pi}{6}i}$

Практическое занятие № 2

Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта; в формировании технологического цикла эксплуатации машин и оборудования на железнодорожном транспорте.

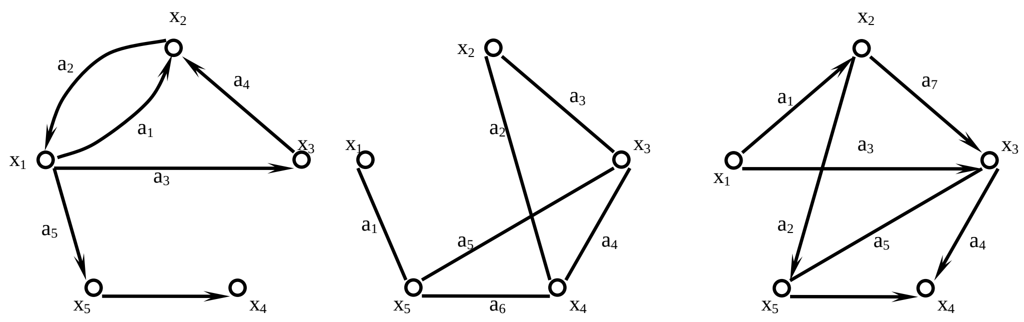
Цель: Научиться строить графы

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

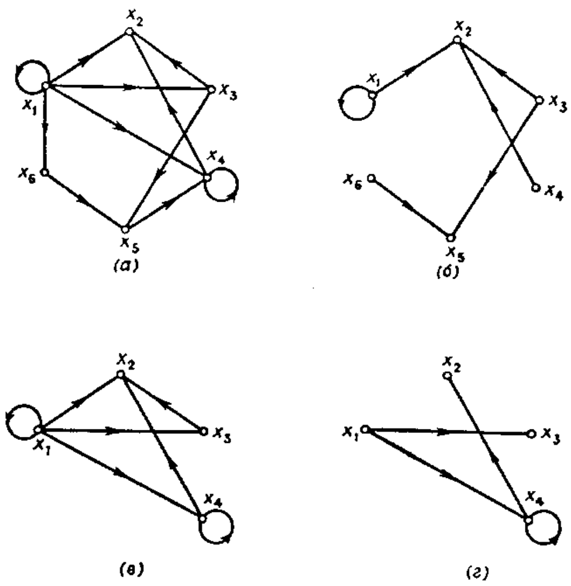
Граф *G* задается множеством точек или *вершин* $x_1, x_г, \ldots, x_n$(которое обозначается через *X)* и множеством линий или *ребер* $a_1, a_2, \ldots, a_m$(которое обозначается символом *A),* соединяющих между собой все или часть этих точек. Таким образом, граф *G*полностью задается (и обозначается) парой *(X, A)*.

Если ребра из множества*A*ориентированы, что обычно показывается стрелкой, то они называются *дугами,* и граф с такими ребрами называется *ориентированным* графом. Если ребра не имеют ориентации, то граф называется *неориентированным*



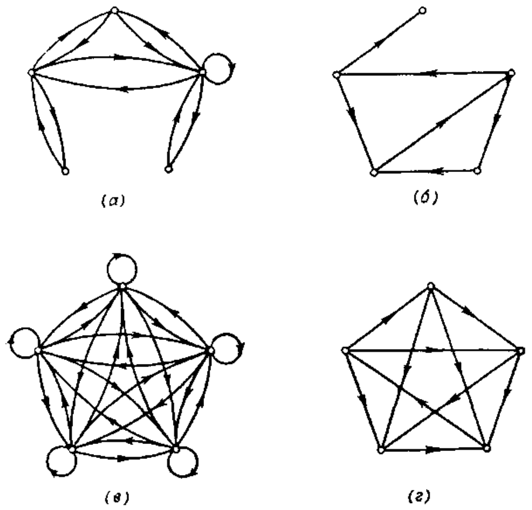
(*а*) **(*б*)** **(*в*)**

Пусть дан граф *G=(X, A)*. *Остовным подграфом* G_pграфа *G*называется граф *(X, A_p)*, для которого $A_p \subset A$. Таким образом, остовный подграф имеет то же самое множество вершин, что и граф *G,* но множество дуг подграфа G_pявляется подмножеством множества дуг исходного графа.



Типы графов

Граф $G=(X,A)$ называют *полным,* если для любой пары вершин x_i и x_j в *X*существует ребро $\overline{(x_i,x_j)}$ в $\overline{G}=(X,\overline{A})$, т. е. для каждой пары вершин графа *G* должна существовать по крайней мере одна дуга, соединяющая их. Полный неориентированный граф, построенный на *n*вершинах, обозначается через K_n.



Пусть дан граф *G*, его *матрица смежности* обозначается через $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ и определяется следующим образом:

$a_{ij}=1$, если в *G*существует дуга (x_i,x_j),

$a_{ij}=0$ если в *G*нет дуги (x_i,x_j).

Таким образом, матрица смежности графа, изображенного на рис. имеет вид

$$
A = \begin{array}{c|cccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Например, сумма всех элементов строки x_i матрицы дает полустепень исхода вершины x_i, а сумма элементов столбца x_i — полустепень захода вершины x_i. Множество столбцов, имеющих 1 в строке x_i,. есть множество $\Gamma(x_i)$, а множество строк, которые имеют 1 столбце x_i, совпадает с множеством $\Gamma^{-1}(x_i)$.

Пусть дан граф *G* с *n* вершинами и *m* дугами. *Матрица инциденций* графа *G* обозначается через $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ и является матрицей размерности $n \times m$, определяемой следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_i,

$b_{ij} = -1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_i,

$b_{ij} = 0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_i или если a_j является петлей.

Для графа, приведенного на рис., матрица инциденций имеет вид

$$
B = \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_{91} & a_{10} \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
x_2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Поскольку каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один – равный -1, либо все элементы столбца равны 0.

Если *G* является неориентированным графом, то его матрица инциденций определяется так же, как и выше, за исключением того, что все элементы, равные —1, заменяются на +1.

Задание:

Вариант 1

1. Представить в виде ориентированного графа отношение $\rho = (V, E)$, $V = \{2, 4, 16, 22\}$, $E = \{(x, y) : x / y$ – четно$\}$.
2. Ориентированный граф G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задан списком дуг
$\{(1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (5, 1), (5, 6), (5, 6), (5, 6), (7, 4), (7, 6)\}$.
Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.
3. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Неориентированный граф G задан вершинами $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ и рёбрами $\{(1,3); (1,4); (1,5); (1,7); (2,3); (2,4); (2,7);(3,5); (3,7); (4,6); (4,7); (5,6); (6,7)\}$. Построить реализацию графа, найти его остов.

Вариант 2

1. Представить в виде ориентированного графа отношение $\rho = (V, E)$,$V = \{2, 4, 16, 22\}$, $E = \{(x, y) : (x + y) / 6\}$.
2. Ориентированный граф G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задан списком дуг
$\{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 5),(5, 7), (7, 1)\}$.
Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.
3. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Неориентированный граф с множеством вершин $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ и ребрами $\{(1,4), (1,6), (2,1), (2,2), (2,6),(3,2), (3,4), (3,6), (4,6),(5,2), (5,4), (5,5), (6,2), (6,5), (7,1), (7,6)\}$. Построить реализацию графа, найти его остов.

Практическое занятие № 3

Нахождение производных функций, нахождение неопределенных и вычисление определенных интегралов, вычисление площади плоской фигуры и объема тела вращения

Цель:

- Закрепить умение находить производные функций и неопределенных интегралов;
- Отработать навыки вычисления определенных интегралов.

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

ПРОИЗВОДНАЯ

Производные элементарных функций

1. $(C)'=0$	2. $(x)'=1$	3. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	5. $\left(e^x\right)' = e^x$
6 $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	7. $\left(\ln x = \dfrac{1}{x}\right)$	8. $(\sin x)' = \cos x$	9. $(\cos x)' = -\sin x$	10. $tgx' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $ctgx' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$	12.$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	13/$(arcctgx)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	14.$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15.$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования:

1. $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x);\ \left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$
2. $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $(kf(x))' = kf'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Производная сложной функции: $f(\varphi(x))' = f'(u)(\varphi'(x))$

Исследование функции

Рассмотрим последовательность выполнения операций при исследовании функции и построении ее графика на следующем примере.

Пример. Исследуйте функцию и постройте ее график $y = x\sqrt{x} - 6x$

Решение.

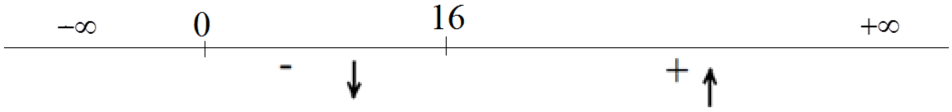
1) Область определения. $x \in [0,+\infty)$

2) Функция не периодическая.

3) Функция общего свойства, то есть не относится ни к четным, ни к нечетным, так как $y(-x) \neq y(x);\ y(-x) \neq -y(x)$..

3) Области возрастания-убывания.

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6;\quad \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6x = 0;\ \frac{9}{4}x = 36;\ 9x = 144;\ x = 16;\ x - 16 = 0$$



$x \in (0;16)$ - функция убывает; $x \in (16;+\infty)$ - функция возрастает

4) Точки экстремумов: при переходе через $x=16$ первая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно при $x=16$ имеем минимум. Для определения значения этого минимума подставим $x=16$ в уравнение кривой:

$y(16)=16\sqrt{16}-6\cdot 16=64-96=-32.$ Таким образом, у графика функции имеется точка минимума с координатами (16; -32).

5) Точки пересечения с осями координат.

Для определения ординаты точки пересечения с осью Oy подставим в уравнение кривой $x=0$. В результате получим: $y(0)=0\sqrt{0}-6\cdot 0=0$.

Таким образом, график функции пересекает ось Oy при $y=0$.

Для определения абсциссы точки пересечения с осью Ox подставим в уравнение кривой $y=0$. В результате получим:

$$0=x\sqrt{x}-6x; \quad x(\sqrt{x}-6)=0; \quad x_1=0; \quad \sqrt{x}-6=0; \quad x_2=36.$$

Таким образом, график функции пересекает ось Ox в двух точках: при $x=0$ и $x=36$.

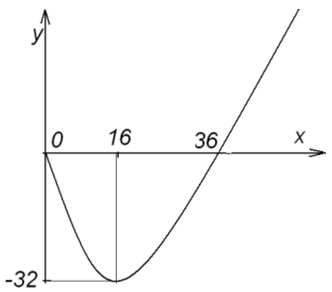
6) Области выпуклости-вогнутости.

Для определения участков вогнутости решаем неравенство: $y''=\dfrac{3}{4\sqrt{x}}>0$. Оно справедливо для любого x из области определения. Следовательно, график функции всюду вогнут.

Для определения участков выпуклости решаем неравенство: $y''=\dfrac{3}{4\sqrt{x}}<0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет участков выпуклости.

7) Точки перегиба:

Для определения точек перегиба решаем уравнение: $y''=\dfrac{3}{4\sqrt{x}}=0$. Оно не имеет решения. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.



8) Для построения графика функции начертим оси координат и отметим выявленные нами точки: минимума (16;-32) и пересечения с осями координат (0;0) и (36;0), а также области возрастания-убывания функции и ее вогнутости. В результате получим график, изображённый на рисунке.

Применение производной в геометрии

Производная функции $y=f(x)$ *в* некоторой точке x_0 численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке (x_0, y_0).

Касательной к графику функции $y=f(x)$*, дифференцируемой в точке* x_0*, называется прямая, проходящая через точку* $(x_0, f(x_0))$ *и имеющая угловой коэффициент* $k=f'(x_0)$.

При названных условиях уравнение касательной имеет следующий вид:

$$y-y_0=f'(x)(x-x_0)$$

Механический смысл производной.

Если закон прямолинейного движения точки задан уравнением $s = f(t)$, где s- путь; t - время, то мгновенная скорость движения vв момент t определяется равенствами

$$v = f'(t) = s',$$

т. е. скорость точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от пути s по времени.

Ускорение точки при прямолинейном движении в момент времени t есть производная от скоростиv по времени или вторая производная от пути s по времени.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первообразная. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка существует производная* ***F'(x)****, равная $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.*

Множество первообразных для данной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования; C - константа.

Неопределенные интегралы элементарных функций

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$	11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$	12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2} \right\rvert + C$	14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	14. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$

Методы интегрирования

Ниже перечислены основные свойства интегралов.

1. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx \quad (3.3)$$

2. *Интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов:*

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \quad (3.4)$$

3. *Вид интеграла не зависит от вида переменной интегрирования:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(dx)] + C. \quad (3.5)$$

или, что тоже самое,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(dx)] + C,$$

где $\varphi(x)$ - функция, непрерывная вместе со своей производной.

Рассмотрим основные методы интегрирования:

I. ***Непосредственное интегрирование.***

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример. Найти $\int \left(4x^3 - 15x^2 + 14x - 3\right)dx$

Решение. Воспользуемся свойством 2. интеграла: интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих же функций.

$$\int(4x^3-15x^2+14x-3)dx=\int 4x^3dx-\int 15x^2dx+\int 14xdx-\int 3dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-15\frac{x^3}{3}+14\frac{x^2}{2}-3x+C=$$
$$=x^4-5x^3+7x^2-3x+C$$

II. ***Метод подстановки.***

Этот метод называют также *методом замены переменной.* Использование этого метода основано на свойстве 3 интеграла. Его следует применять, когда интеграл не привести к табличному виду с помощью тождественных преобразований, и в то же время можно привести к табличному виду с помощью замены переменных.

Пример. Найти $\int(2+x)^7dx$

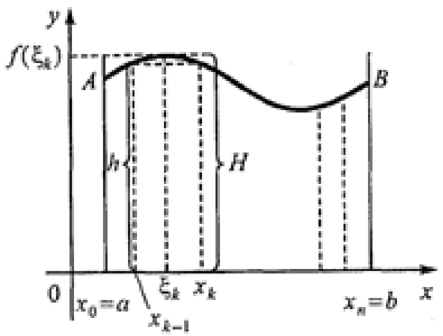
Решение. Введем новую переменную: $2+x=t;\ x=t-2;\ dx=dt$. Найдем интеграл:

$\int(2+x)^7dx=\int t^7dt=\dfrac{t^8}{8}+C$ Выразим результат через первоначальный аргумент:

$$\int(2+x)^7dx=\frac{(2+x)^8}{8}+C$$

Определенный интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции. *Дана плоская фигура, ограниченная графиком функции* $y=f(x)>0$ *и отрезками прямых* $y=0,\ x=a,\ x=b$. *Функция* $y=f(x)$ *определена, не*прерывна и неотрицательна в промежутке $[a,b]$. Вычислить площадь S полученной фигуры $aABb$, называемой *криволинейной трапецией.*



Определение. *Предел* $S=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ *называют* **определенным интегралом** *от функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a,\ b]$ *и обозначают* $\int_a^b f(x)dx$ *т. е.*

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

Число a *называется* **нижним пределом** *интеграла,* b**-верхним**.

Промежуток $[a,\ b]$ *называется* **промежутком интегрирования**, *x*-**переменной интегрирования.**

Теорема. *Определенный интеграл функции* $f(x)$, *непрерывной на промежутке [a, b], равен разности значений любой ее первообразной в точках b и a*

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad \text{формулы Ньютона-Лейбница.}$$

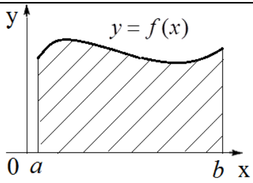
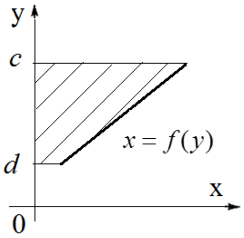
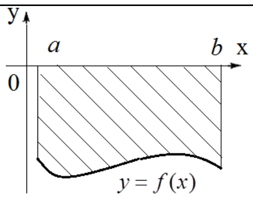
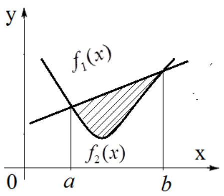
Пример. Вычислить $\int\limits_{-2}^{3}xdx$

Решение. Находим неопределенный интеграл: $\int\limits_{-2}^{3}xdx=\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}$ Найдя значение $\dfrac{x^2}{2}$ сначала при $x=3$, а затем при $x=-2$, вычислим разность:

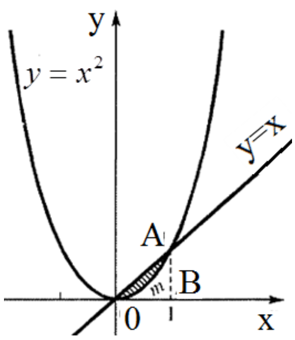
$$\int_{-2}^{3}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}=\frac{3^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=\frac{9-4}{2}=2{,}5$$

Площади плоских фигур и объемы тел вращения

Формулы для вычисления площади плоской фигуры.

Тип условия задачи	Чертеж	Формула
1		$S=\int_a^b f(x)dx$
2		$S=\int_d^c f(y)dy$
3		$S=-\int_a^b f(x)dx$
4		$S=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную графиками функций: $y=x^2$; $y=x$



Решение.Построим графики данных функций, найдя прежде точки их пересечения путем решения системы: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$.Решив эту систему, получим точки O(0; 0) и A(1; 1).

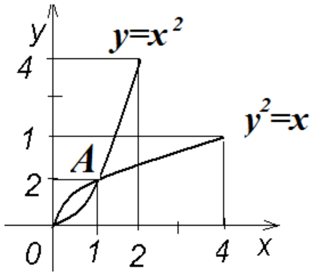
В данном случае подходит тип условия 4 задачи.

$$S=\int_0^1 (x-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ кв.ед.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная линией $y=f(x)\ge 0$ ***и прямыми*** $y=0$; $x=a$; $x=b$, ***вращается вокруг оси х, то объем тела вращения вычисляется по формуле:*** $V=\pi\int_a^b y^2dx$

Если фигура, ограниченная линиями $y_1 = f_1(x) \ge 0$ ***и*** $y_2 = f_2(x) \ge 0$ $\left(0 \le f_1(x) \le f_2(x)\right)$ ***прямыми*** $x = a;\ x = b$***, вращается вокруг оси*** Ox***, то объем тела вращения вычисляется по формуле:*** $V = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx$

Пример. Найдите объем тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями: $y^2 = x;\ y = x^2$



Решение. Определим координаты точки пересечения этих линий из системы:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases};\ y^4 = y;\ y(y^3 - 1) = 0;\ y_1 = 0;\ y_2 = 1;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1.$$

Таким образом, имеем две точки пересечения линий: $O(0;0),\ A(1;1)$. По формуле имеем:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \pi \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi(куб.ед.).$$

Приложения определенного интеграла в механике

Путь, пройденный телом при неравномерном движении за время $t_2 - t_1$**, вычисляется по формуле:** $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt,\ f(t) = v$.

Пример. Скорость движения материальной точки задана уравнением $v = 9t^2 - 8t,\ м/с$. Определить ее путь за четвертую секунду.

Решение. $t_1 = 3c, \quad t_2 = 4c$

$$S = \int_3^4 \left(9t^2 - 8t\right)dt = \left(3t^3 - 4t^2\right)\Big|_3^4 = \left(3\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2\right) - \left(3\cdot 3^3 - 4\cdot 3^2\right) = 128 - 45 = 83м.$$

Ответ *83 м*.

Пример. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2 м/с$. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение Скорость движения тела равна пулю в моменты начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно *t*:

$12t - 3t^2 = 0;\ 3t(4 - t) = 0;\ t_1 = 0;\ t_2 = 4$ t_1, t_2 - пределы интегрирования.

$S = \int_0^4 \left(12t - 3t^2\right)dt = \left(6t^2 - t^3\right)\Big|_0^4 = 6\cdot 4^2 - 4^3 = 32м$ **Ответ.** *S = 32 м.*

Задания:

Вариант 1

1. Найдите производные: $y=\left(\cos x+x^2\right)\cdot x^4$ и $y=\sin\left(x^3-x^2\right)$.
2. Для функции $f(x)=3x-2tgx$ найдите $f'(0)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2-6x+5$ в точке $x_0=4$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 4с, если $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2-3$.
5. Найдите значение точки максимум x_0 для функции $y=-x^3-12x^2-36x+11$.
6. Найдите неопределенные интегралы:
   - $\int\left(5x^7+2\right)dx$
   - $\int\left(5^x-\frac{1}{x}\right)dx$
   - $\int(6x-5)^4\,dx$
   - $\int\frac{dx}{\cos^2 6x}$
7. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-2}^{2}5x^4dx$ и $\int_{4}^{25}\frac{3}{\sqrt{x}}dx$.
8. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2}(4x-3)^3\,dx$.
9. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V=8t+1$.
10. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=x^3$; $x=2$; $x=4$ и $y=0$.

Вариант 2

1. Найдите производные: $y=\left(x^2+5x\right)\cdot e^x$ и $y=\left(x^2+7x-1\right)^3$.
2. Для функции $f(x)=10x+3\cos x$ найдите $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=2x^2-5x-3$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 5с, если $S=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2$.
5. Найдите значение точки максимум x_0 для функции $y=x^3-12x^2+45x-5$.
6. Найдите неопределенные интегралы:
   - $\int(8\sin x+3)dx$

- $\int\left(3^x+\frac{1}{x}\right)dx$
- $\int(4-5x)^6\,dx$
- $\int e^{2x+8}dx$

7. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-2}^{1}12x^3dx$ и $\int_9^{16}\frac{2}{\sqrt{x}}dx$.
8. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_1^2(5x-4)^2\,dx$.
9. Найдите путь, пройденный телом за 4 секунды, если его скорость определяется формулой: $V=t+6$.
10. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=9x^2$; $x=2$; $x=3$ и $y=0$.

Вариант 3

1. Найдите производные: $y=\left(\sin x+3x^2\right)\cdot x^5$ и $y=\left(4x^2-2x+1\right)^3$.
2. Для функции $f(x)=2e^x+4x$ найдите $f'(0)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y=x^2+6x+8$ в точке $x_0=2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 3с, если $S=2t^3-5t^2+6$.
5. Найдите значение точки минимум x_0 для функции $y=-x^3+12x^2-21x+12$.
6. Найдите неопределенные интегралы:
   - $\int(6\cos x-2)dx$
   - $\int\left(\frac{1}{x}-2^x\right)dx$
   - $\int(7-3x)^5\,dx$
   - $\int\frac{dx}{\cos^2 8x}$
7. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-1}^{2}16x^3dx$ и $\int_1^4\frac{4}{\sqrt{x}}dx$.
8. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_1^2(4x-2)^2\,dx$.

9. Найдите путь, пройденный телом за 5 секунд, если его скорость определяется формулой: $V = 2t + 3$.
10. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = x^2$; $x = 3$; $x = 6$ и $y = 0$.

Вариант 4

1. Найдите производные: $y = (x - \cos x) \cdot \sin x$ и $y = (x^2 + 3x + 5)^5$.
2. Для функции $f(x) = 9\sin x + 14x$ найдите $f'(\pi)$.
3. Составьте уравнение касательной к функции $y = x^2 + 2x - 8$ в точке $x_0 = 2$.
4. Найдите скорость тела в момент времени 2с, если $S = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 3$.
5. Найдите значение точки минимум x_0 для функции $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 7$.
6. Найдите неопределенные интегралы:
    - $\int \left(4 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$
    - $\int \left(\frac{1}{x} - 7^x\right) dx$
    - $\int (4x - 3)^7 dx$
    - $\int e^{4x-7} dx$
7. Вычислите определенные интегралы табличным способом: $\int_{-3}^{1} 8x^3 dx$ и $\int_{1}^{9} \frac{5}{\sqrt{x}} dx$.
8. Вычислите определенный интеграл способом замены переменной: $\int_{1}^{2} (6x - 5)^2 dx$.
9. Найдите путь, пройденный телом за 3 секунды, если его скорость определяется формулой: $V = 10t - 8$.
10. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = 4x^3$; $x = 1$; $x = 2$ и $y = 0$.

Практическое занятие № 4

Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Применение обыкновенных дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач.

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения первого и второго порядка

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$f(x,\ y,\ y') = 0$$

или

$$y' = F(x,\ y).$$

Определение ***Решением дифференциального уравнения первого порядка*** *называется функция* $y = \varphi(x)$, *один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.*

Пример *Решить уравнение*

$$y' = x.$$

Р е ш е н и е. Решением уравнения является функция $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$, где C — произвольная действительная постоянная.

Определение ***Общим решением дифференциального уравнения*** *называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения.*

Таким образом, если решение дифференциального уравнения задается формулой $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$, то она задает общее решение, если

1. при каждом фиксированном $C = C_0$ эта функция определяет решение;
2. любое решение может быть найдено из этой формулы при некотором $C = C_0$.

Определение ***Частным решением дифференциального уравнения*** *называется решение, полученное из формулы (формул) общего решения при некотором значении* $C = C_0$.

В примере формула $y = \frac{x^2}{2} + C$ задает общее решение, а, например, решения $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$ — частные решения.

Найти решение дифференциального уравнения — значит выразить решение в квадратурах — через элементарные функции и их неопределенные интегралы.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение . ***Уравнениями с разделяющимися переменными*** *называются уравнения вида*

$$y' = f(x)g(y)$$

или

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0.$$

Метод разделения переменных (формальный).

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

Умножив уравнение на $\frac{dx}{g(y)}$, получим

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{g(y)} & = & f(x)dx, \\ g(y) & \neq & 0, \end{array}\right. \\ g(y) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \ y(x) \text{ — делаем проверку, подставляя в уравнение.}$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

откуда находим решение в виде $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$.

Замечание Общее решение может не задаваться одной формулой. Иногда форма его записи зависит от способа записи постоянной или от метода интегрирования.

Пример *Решить уравнение* $y' = xy^2$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{y^2} & = & xdx, \\ y & \neq & 0, \end{array}\right. \\ y = 0. \end{array}\right.$$

$y \equiv 0$ — решение, проверяется подстановкой в уравнение.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

Отметим, что решение $y(x) \equiv 0$ не получается из этой формулы ни при каком значении C, поэтому общее решение определяется их совокупностью.

Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y'' + py' + q = 0,$$

где p и q — действительные числа. Рассмотрим, как решаются однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка зависит от корней характеристического уравнения. Характеристическое уравнение — это уравнение **$k^2+pk+q=0$.**

1) Если корни характеристического уравнения — различные действительные числа:

$$k_1 \in R, k_2 \in R, k_1 \neq k_2,$$

то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) Если корни характеристического уравнения — равные действительные числа

$$k_1 \in R, k_2 \in R, k_1 = k_2$$

(например, при дискриминанте, равном нулю), то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка есть

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

3) Если корни характеристического уравнения — комплексные числа

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

(например, при дискриминанте, равном отрицательному числу), то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка записывается в виде

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Задание:

Вариант 1

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y=5e^{-2x}-2x+1, y'+2y=-4x$
2. Решите д у с разделёнными переменными $2ydy=3x^2dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $2xdy=(y+2)dx$; $xy'-y=0$
4. Найдите частное решение, если: $y'=y, y(-2)=4$
5. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y''-7y'+12y=0$; b) $y''-2y'+y=0$; c) $y''-2y'+10y=0$

Вариант 2

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y=\cos 2x, y'+2xy=0$
2. Решите д у с разделёнными переменными $3y^2dy=4x^3dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $(x-2)dy=2ydx.$; $xy'=yx^2$
4. Найдите частное решение, если: $xy'+y=0, y(-2)=8$
5. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y''+3y'+2y=0$; b) $y''-4y'+4y=0$; c) $y''+4y'+13y=0$

Вариант 3

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y=x+Ce^x, (x-y+1)y'=1$
2. Решите д у с разделёнными переменными $3y^2dy=2xdx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $2xdy=(y-2)dx$; $yy'+x=0$
4. Найдите частное решение, если: $2\sqrt{y}dx=dy, y(0)=1$
5. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y''-5y'+6y=0$; b) $y''+6y'+9y=0$; c) $y''+4y'+8y=0$

Вариант 4

1. Выяснить является ли данная функция решением д у $y=3e^{-x}-x+1, y'+y=-x$
2. Решите д у с разделёнными переменными $4y^3dy=3x^2dx.$
3. Решите д у с разделяющимися переменными $(x+2)dy=2ydx.$; $x^2y'+y=0$
4. Найдите частное решение, если: $x^2y'+y^2=0, y(-1)=1$
5. Найдите общее решение однородных уравнений:
   a) $y''-y'-6y=0$; b) $y''+4y'+4y=0$; c) $y''+25y=0$

Практическое занятие № 5

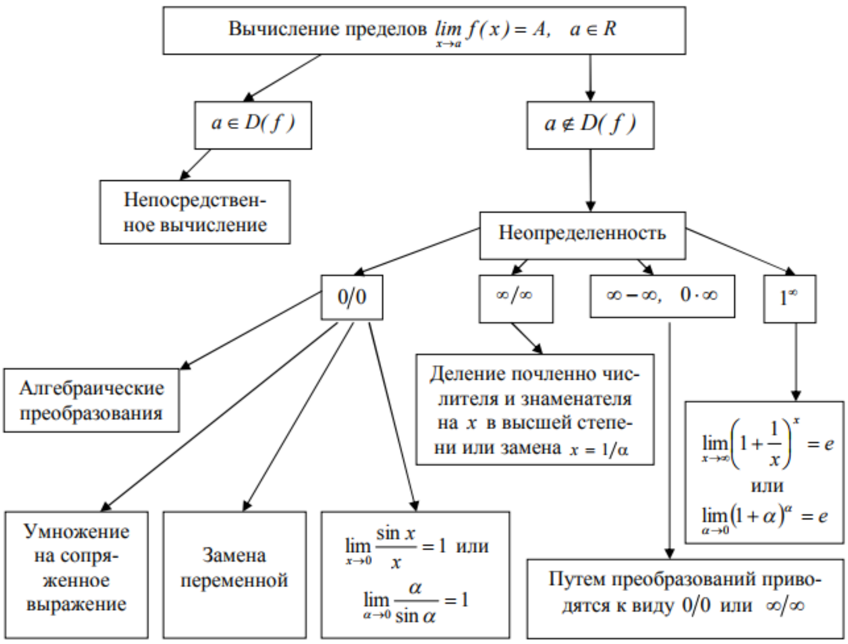
Оценка результатов эффективности работы механизмов и оборудования подвижного состава на железнодорожном транспорте посредствам определения сходимости числового ряда по признаку Даламбера.

Цель: Научиться определять сходимость рядов

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Способы вычисления пределов



Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданной отношением двух многочленов, существует два способа:

1) каждый член числителя и знаменателя необходимо разделить на x в наивысшей степени;

2) применить метод замены переменной: $x=\frac{1}{\alpha}$ (при $x\to\infty$ $\alpha\to 0$).

Пример Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

1 способ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{4}{x}}=\frac{2}{3}$,так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{4}{x}$ стремится к нулю.

а) Дробно-рациональные функции. В этом случае: в числителе и знаменателе выделяется множитель $(x-a)$ и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель;

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Применим способ группировки слагаемых в числителе и знаменателе дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

б) Дробно-иррациональные функции. Для избавления от неопределенности в этом случае существует два способа:

1) умножение числителя и знаменателя дроби на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

2) метод замены переменной.

В результате таких преобразований удается свести данный случай к уже рассмотренному в предыдущем пункте.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}x=t^6,\sqrt{x}=t^3,\sqrt[3]{x}=t^2,\\ x\to 1\Rightarrow t\to 1\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

в) Пределы от функций, в которых участвуют *тригонометрические выражения*, обычно сводятся к *первому замечательному пределу.*

Теорема (признак Даламбера). Если в ряде с положительными членами $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ отношение $(n+1)$-го члена ряда к n-му при $n\to\infty$ имеет конечный предел D, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D$, то:- ряд сходится в случае $D<1$,- ряд расходится в случае $D>1$.В случаях, когда предел не существует или он равен единице, ответа на вопрос о сходимости или расходимости теорема не дает. Необходимо провести дополнительное исследование.

Задание:

Вариант 1

1. Найдите вторые члены рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$;

2. Найдите частичную сумму S_2 для рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n+1)(n+2)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n+1)n$

3. Выясните, сходится или расходится ряд, используя необходимый признак сходимости:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n-7}{7n^2+10n-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^5-4n^4+1}{1-4n^3+7n^4}$;

4. Выясните, сходится или расходится ряд, используя достаточный признак сходимости (Даламбера):

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdots(2n+5)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$

Вариант 2

1. Найдите вторые члены рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$;

2. Найдите частичную сумму S_2 для рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

3. Выясните, сходится или расходится ряд, используя необходимый признак сходимости:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^4+4}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)(n^2+4)}{2n^4+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2n+5}{1+10n+7n^2}$;

4. Выясните, сходится или расходится ряд, используя достаточный признак сходимости (Даламбера):

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^{3n+2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{3\cdot7\cdot11\cdots(4n-1)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^4}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{1\cdot4\cdot10\cdots(3n+1)}$

Практическое занятие № 6

Решение задач на нахождение вероятности события при изучении и планировании технологического цикла эксплуатации машин и оборудования на железнодорожном транспорте

Цель: Закрепить умения находить вероятность событий

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности, т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение.Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение.Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Исходя из этих общих понятий, можно дать определение вероятности.

Определение.Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

<u>Пример.</u> В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10}$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

<u>Определение.</u>Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Вообще говоря, классическое определение вероятности – довольно относительное. Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

К примеру, при проведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д.

Задание:

Вариант 1

1. В компании оказалось 10 девушек и 5 юношей. Найдите вероятность того, что на танец все юноши пригласят разных девушек.
2. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их на удачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Вариант 2

1. Берется наугад трехзначное число. Найдите вероятность того, что первая и последняя цифры этого числа совпадают.
2. Десять различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом.

Вариант 3

1. Устройство состоит их пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найдите вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
2. К экзамену выдается 25 вопросов. Студент подготовил 20 вопросов. В билете 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает 2 вопроса.

Вариант 4

1. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найдите вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
2. На корточках написаны числа от 1 до 10. Берутся подряд две карточки. Найти вероятность того, что число на первой карточке будет меньше числа на второй карточке.

Вариант 5

1. Из четырех одинаковых карточек, на которых написаны соответственно буквы А, Б, В, Г, наугад взяты две. Определите вероятность того, что буквы на этих карточках будут соседними по алфавиту.
2. В группе 30 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Вариант 6

1. В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102,,120 и произвольно расположенных. Перфораторщица наудачу извлекает две карты. Найдите вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.
2. В партии из 18 деталей находится 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

1 вариант	***2 вариант***	***3 вариант***	***4 вариант***	***5 вариант***	***6 вариант***
1, 12, 13	***2, 11, 14***	***3, 10, 15***	***4, 9, 13***	***5, 8, 15***	***6, 7, 15***

Задача 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Задача 2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Задача 3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Задача 4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Задача 5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Задача 6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Задача 7. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Задача 8. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

Задача 9. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

Задача 10. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

Задача 11. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Задача 12. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

Задача 13. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса?

Задача 14. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на карточках, равна десяти?

Задача 15. В урне лежат шары, двузначные номера которых составлены из цифр 1,2,3,4,5. Какова вероятность вынуть шар с номером 15?

Практическое занятие № 7

Вычисление определенных интегралов с использованием численных методов

Цель: Научиться применять формулы прямоугольников, трапеций и парабол при вычислении площади криволинейной трапеции

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Метод прямоугольников

Одним из простейших методов численного интегрирования является **метод прямоугольников**. На частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ подынтегральную функцию заменяют полиномом Лагранжа нулевого порядка, построенным в одной точке. В качестве этой точки можно выбрать середину частичного отрезка $x_{j-0.5} = x_j - 0.5h$. Тогда значение интеграла на частичном отрезке: $\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cdot dx \approx f(x_{j-0.5})\cdot h$ Подставив это выражениеполучим составную формулу **средних прямоугольников**:

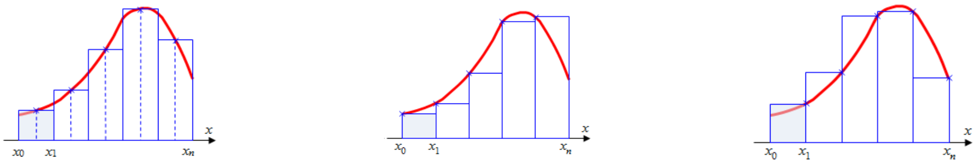
$$\int\limits_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} f(x_{j-0.5})\cdot h$$

Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рис.(а). Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из N прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы N элементарных прямоугольников.

Формулу (2.7) можно представить в ином виде:

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} h\cdot f(x_{j-1})$$ или $$\int\limits_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} h\cdot f(x_j)$$

Эти формулы называются формулой **левых и правых прямоугольников** соответственно. Графически метод левых и правых прямоугольников представлен на рис (б, в). Однако из-за нарушения симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, их погрешность значительно больше, чем в методе средних прямоугольников.



а) средние прямоугольники б) левые прямоугольники в) правые прямоугольники

Рис. Интегрирование методом прямоугольников

Метод трапеций

Если на частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ подынтегральную функцию заменить полиномом Лагранжа первой степени:

$$f(x)=L_{1,j}(x)=\frac{1}{h}\left[\left(x-x_{j-1}\right)f(x_j)-\left(x-x_j\right)f(x_{j-1})\right]$$ то искомый интеграл на частичном отрезке запишется следующим образом:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{1}{h}\left[f(x_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x-x_{j-1}\right)dx - f(x_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x-x_j\right)dx\right] = \frac{f\left(x_{j-1}\right)+f\left(x_j\right)}{2}h$$

Тогда составная формула трапеций на всем отрезке интегрирования $[a,b]$ примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N}\frac{f\left(x_j\right)+f\left(x_{j-1}\right)}{2}h = h\left[\frac{1}{2}(f_1+f_N)+f_2+\ldots+f_{N-1}\right]$$ Графически метод трапеций представлен на рис. Площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из Nтрапеций, при этом кривая заменяется вписанной в нее ломаной. На каждом из частичных отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные значения, при этом площадь трапеции на каждом отрезке определяется по формуле

Погрешность метода трапеций выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удается далеко не всегда.

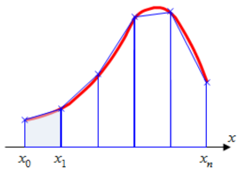


Рис. Интегрирование методом трапеций

Метод Симпсона

В этом методе подынтегральная функция на частичном отрезке $[x_{j-1},x_j]$ аппроксимируется параболой, проходящей через три точки x_{j-1}, $x_{j-0.5}$, x_j, то есть интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени:

$$f(x)=L_{2,j}(x)=\frac{2}{h^2}\left[\left(x-x_{j-0.5}\right)\left(x-x_j\right)f(x_{j-1})-\right.$$
$$\left.-2\cdot\left(x-x_{j-1}\right)\left(x-x_j\right)f(x_{j-0.5})+\left(x-x_{j-1}\right)\left(x-x_{j-0.5}\right)f(x_j)\right]$$ Проведя интегрирование, получим:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f_{j-1}+4f_{j-0.5}+f_j\right)$$

Это и есть формула Симпсона или формула парабол. На отрезке $[a,b]$ формула Симпсона примет вид:

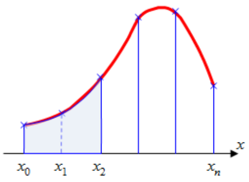
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[f_0+f_N+2(f_1+f_2+\ldots+f_{N-1})+4(f_{0.5}+f_{1.5}+f_{2.5}+\ldots+f_{N-0.5})\right]=$$
$$=\frac{h}{6}\left[f_0+f_N+2\cdot\sum_{j=1}^{N-1}f_j+4\cdot\sum_{j=0.5}^{N-0.5}f_j\right]$$

Если разбить отрезок интегрирования $[a,b]$ на **четное** количество $2N$ равных частей с шагом $h=\dfrac{b-a}{2N}$, то можно построить параболу на каждом сдвоенном частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ и переписать выражения без дробных индексов. Тогда формула Симпсона примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + f_5 + ..\right.$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2N} + 2\cdot\sum_{j=2,2}^{2N-2} f_j + 4\cdot\sum_{j=1,2}^{2N-1} f_j\right]$$

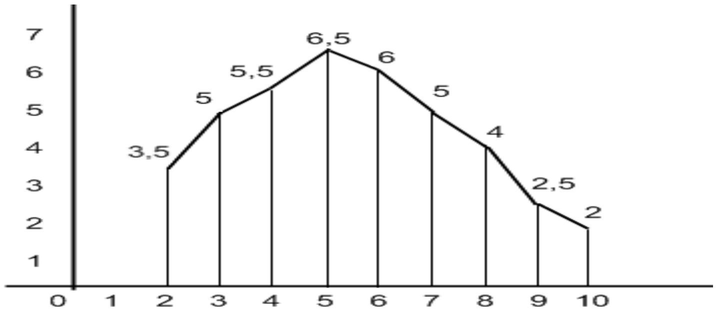
Графическое представление метода Симпсона показано на рис. На каждом из сдвоенных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой параболой. *Рис. Метод Симпсона*



Задание:

1 вариант

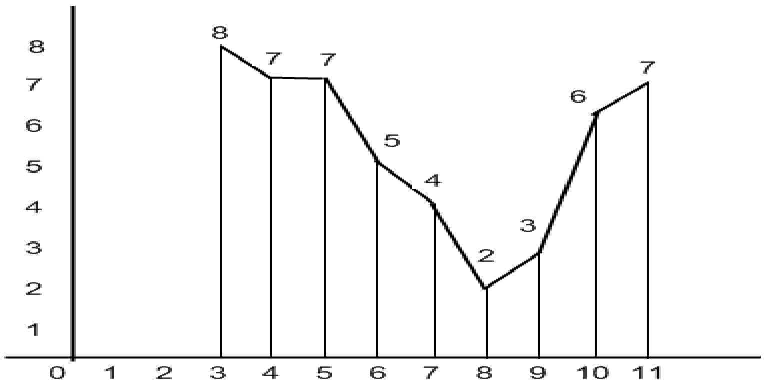
1. Найдите приближённое значение площади по рисунку:



2. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_1^7 x^5 dx$, разбив его на 6 частей.
3. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_1^{2.2} \frac{dx}{1+x^2}$, разбив его на 6 частей.

2 вариант

1. Найдите приближённое значение площади по рисунку:



2. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_1^9 x^2 dx$, разбив его на 8 частей.
3. Вычислите приближённое значение интеграла $\int_1^5 \frac{2dx}{\sqrt{x}}$, разбив его на 4 части.

Практическое занятие № 8

Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при n=2), функции, заданной аналитически. Исследование свойств этой функции для определения эффективности планирования технологического цикла эксплуатации подвижного состава на железнодорожном транспорте.

Цель: Закрепить и систематизировать знания по теме «Основные численные методы»

Перечень необходимых средств обучения: листы формата А 4 для практических работ.

Краткие теоретические сведения

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции f(x) по заданным в конечном числе точек значениям этой функции. Один из универсальных способов построения формул численного дифференцирования состоит в том, что по значениям функции f(x) в некоторых узлах x_0 , x_1 , ... , x_N строят интерполяционный полином $P_N(x)$ (обычно в форме Лагранжа) и приближенно полагают $f^{(r)}(x) \approx P^{(r)}{}_N(x)$, $0 \le r \le N$

В ряде случаев наряду с приближенным равенством удается (например, используя формулу Тейлора) получить точное равенство, содержащее остаточный член R (погрешность численного дифференцирования):

$f^{(r)}(x) = P^{(r)}{}_N(x) + R$, $0 \le r \le N$

Такие формулы называются формулами численного дифференцирования с остаточными членами. Степень, с которой входит величина $h = \max_i h_i$ ($h_i=x_i - x_{i-1}$) в остаточный член, называется порядком погрешности формулы численного дифференцирования. Формулы с отброшенными остаточными членами называются просто формулами численного дифференцирования.

Формулы численного дифференцирования с остаточными членами для первой (r=1) и второй (r=2) производных в узлах, расположенных с постоянным шагом $h_i \equiv h > 0$:

r=1, N=1 (два узла): $f'(x_0) = (f_1 - f_0)/h - hf''(\xi)/2$

$f'(x_1) = (f_1 - f_0)/h + hf''(\xi)/2$

r=1, N=2 (три узла): $f'(x_0) = (-3f_0 + 4f_1 - f_2)/2h + h^2 f'''(\xi)/3$

$f'(x_1) = (f_2 - f_0)/2h - h^2 f'''(\xi)/6$

$f'(x_2) = (f_0 - 4f_1 + 3f_2)/2h + h^2 f'''(\xi)/3$

r=2, N=2 (три узла): $f''(x_0) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h_2 - hf'''(\xi)$

$f''(x_1) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 - h^2 f^{(4)}(\xi)/12$

$f''(x_2) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 + hf'''(\xi)$

r=2, N=3 (четыре узла): $f''(x_0) = (2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3)/h^2 + 11h^2 f^{(4)}(\xi)/12$

$f''(x_1) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 - h^2 f^{(4)}(\xi)/12$

$f''(x_2) = (f_0 - 2f_1 + f_3)/h^2 - h^2 f^{(4)}(\xi)/12$

$f''(x_3) = (-f_0 + 4f_1 - 5f_2 + 2f_3)/h^2 + 11h^2 f^{(4)}(\xi)/12$

В приведенных формулах ξ есть некоторая точка (своя для каждой из формул) из интервала (x_0 , x_N). Остаточные члены этих формул находятся с помощью формулы Тейлора. При этом предполагается, что на отрезке [x_0 , x_N] у функции f(x) непрерывна производная, через которую выражается остаточный член. При четном N в среднем узле для четной производной порядок точности формулы на единицу больше, чем в остальных узлах. Поэтому рекомендуется по возможности использовать формулы численного дифференцирования с узлами, расположенными симметрично относительно той точки, в которой ищется производная.

Задание:
Составить таблицу конечных разностей функций, заданных аналитически, от начального значения x_0 до конечного x_7, приняв шаг равным h:

1.	$y = x^3 - x^2 + 6x - 8,\ x_0 = 0\ \ h = 1$	4.	$y = 2x^3 - 8x + 20,\quad x_0 = 0{,}5\ \ h = 0{,}5$
2.	$y = 5x^3 - 8x + 4,\quad x_0 = 0\ \ h = 2$	5.	$y = x^4 - 2x^2 + 1,\quad x_0 = 0\quad h = 0{,}5$
3.	$y = x^4 - 2x^2 + 10,\quad x_0 = 0\ \ h = 0{,}2$	6.	$y = 0{,}5x^3 + 2x^2 - 3x + 8,\ x_0 = 1\ h = 1$

Задание: Построить таблицу разностей функции $\boldsymbol{y = f(x)}$, заданной таблично:

1.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7,5	2	-3,5	-6	-2,5	10	34,5

4.

x	1	2		4	5	6	7
y	6	16	36	72	130	216	336

2.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-3,9	-0,2	6,7	17,4	32,5	52,6	78,3

5.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-3	-6	-3	12	45	102	189

3.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-3,9	-5,2	-3,3	2,4	12,5	27,6	48,3

6.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	8	30	72	140	240	378

Задание: Найти значения первой и второй производных функции, заданной таблично, в точках *x=a+b$_n$*:

1. *x=2,4+0,05n*

x	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
y(x)	3,526	3,782	3,945	4,043	4,104	4,155

n=1

2. *x=4,5-0,06n*

x	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6
y(x)	4,222	4,331	4,507	4,775	5,159	5,683

n=5

3. *x=1,6+0,08n*

x	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y(x)	10,517	10,193	9,807	8,387	8,977	8,637

n=2

4. *x=2,4+0,05n*

x	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
y(x)	3,526	3,782	3,945	4,043	4,104	4,155

n=3

5. *x=4,5-0,06n*

x	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6
y(x)	4,222	4,331	4,507	4,775	5,159	5,683

n=7

6. *x=1,6+0,08n*

x	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y(x)	10,517	10,193	9,807	8,387	8,977	8,637

n=4

Задание: По табличным данным найти аналитическое выражение первой производной:

1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	6	10	26	60	118	206	330	496

2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-2	15	58	139	270	463	730	1083	1534

3.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-1,5	16	70,5	180	362,5	636	1018,5	1528	2182,5

4.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5,5	18	40,5	76	127,5	198	290,5	408	553,5

5.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	7	24	63	136	255	432	679	1008	1431

6.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	18	78	204	420	750	1218	1848	2664

Задание: Вычислить значения первой и второй производной функции в точке x_0, методом численного дифференцирования. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой:

1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	6	10	26	60	118	206	330	496

x_0=1,5

2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-2	15	58	139	270	463	730	1083	1534

x_0=2,5

3.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-1,5	16	70,5	180	362,5	636	1018,5	1528	2182,5

x_0=1,25

4.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5,5	18	40,5	76	127,5	198	290,5	408	553,5

x_0=1,75

5.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	7	24	63	136	255	432	679	1008	1431

x_0=2,2

6.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	18	78	204	420	750	1218	1848	2664

x_0=2,1

Перечень рекомендуемой учебной литературы, информационных ресурсов сети Интернет соответствует пункту 3.2. рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01. Математика специальности 23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог